计算数学丛书

数值解高维偏微分方程的分裂法

康立山　全惠云　等编著

上海科学技术出版社

计算数学丛书

数值解高维偏微分方程的分裂法

康立山　全惠云　等编著

(国家自然科学基金资助项目)

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书主要介绍两种类型的分裂法：一种叫做“算子分裂法”，以解决算子的复杂性为目的.另一种叫做“区域分裂法”，以解决区域的复杂性为目的. 前者以局部一维化方法为基础，后者以Schwarz算法为基础.

阅读本书需要具备数值分析的一般知识. 本书可供高等学校计算数学专业高年级学生及研究生参考，也可供理科其它专业师生、计算数学工作者或其它利用电子计算机从事科学计算的科技人员参考.

责任编辑 唐仲华

计算数学丛书

数值解高维偏微分方程的

分 裂 法

康立山 全惠云 等编著

上海科学技术出版社

（上海瑞金二路450号）

新华书店上海发行所发行 江苏溧阳印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 9.25 字数 202,000

1990年11月第1版 1990年11月第1次印刷

印数 1—2,000

ISBN 7-5323-2022-7/O·141 定价：4.60元

出版说明

《计算数学丛书》是为了适应计算数学和计算机科学的发展，配合高等院校的计算数学教学的需要而组织的一套参考读物．读者对象主要是高等院校数学系和计算机科学系的学生、研究生，亦可供高等院校数学系和计算机科学系的教师以及工矿企业、科研单位从事计算工作的技术人员参考．

本丛书向读者介绍近代计算方法的一些主要进展及其适用范围和实用效果．每种书集中介绍一个专题，针对本专题的近代发展作综合性的介绍，内容简明扼要，重点突出，有分析，有评价，力图使读者对该专题的动向和发展趋势得到一个完整的了解．

本丛书已拟定的选题计有：《线性代数与多项式的快速算法》、《数论变换》、《数值有理逼近》、《矩阵特征值问题》、《索伯列夫空间引论》、《计算组合数学》、《样条与插值》、《不动点算法》、《广义逆矩阵的基本理论和计算方法》、《非线性方程的区间算法》、《奇异摄动中的边界层校正法》、《沃尔什函数理论与应用》、《多项式最佳逼近的实现》、《曲线曲面的数值表示和逼近》、《舍入误差分析引论》、《解边值问题的迦辽金法》、《非线性方程组迭代解法》、《外推法及其应用》、《蒙特卡罗方法》、《发展方程的有限元方法》、《数值解高维偏微分方程的分裂法》等二十余种，于1980年初起陆续出版．

前　言

近三十年来偏微分方程的数值解法是处在迅速发展的时期．一方面是由于从工程及应用科学方面提出需要求解的数学物理问题越来越复杂、越来越多；另方面是日益迅速发展的计算技术提供了解算这类问题的可能．既有需要，又有可能，关键在于数值分析工作者能不能提供与之相适应的有效计算方法．

这本小册子企图从某种角度来阐述解数学物理问题的一些基本原则，即如何将一复杂的数学物理问题化成一系列较简单的易于在计算机上求解的问题．我们所指的“复杂”有两方面的含义：一是指求解区域的不规则性；另一是指求解算子的高维、非线性等．处理这种复杂性的基本原则之一就是分裂法．

我们主要介绍两种类型的分裂法．一种叫做“区域分裂法”，以解决区域的复杂性为目的；另一种叫做“算子分裂法”，以解决算子的复杂性为目的．前者以 Schwarz 算法为基础；后者以局部一维化方法为基础．

本书的特点是以主要精力阐明分裂法的基本原理与方法，而算法的细节则通过一些典型的例子来说明．由于这些数值例子都是我们精心挑选而又亲自计算的，我们把它们当作本书的重要组成部分．读者如果要应用分裂法去解算自己面临的实际课题，则认真地看一看这些例题不会是毫无帮助的．

本书的另一特点是注意到解数学物理问题的并行算法，特别是最近几年新发展起来的一类"异步并行算法"．这类算法既适用于单指令多数据流系统(SIMD)，也适用于多指令多数据流系统(MIMD)，特别是异步并行计算机系统．

本书初稿曾作为武汉大学计算数学专业77级与78级选修课"偏微分方程的分裂法"教材，每周讲授两学时，并配以一定的计算实习，一学期学完．我们当时认为，这些即将毕业的同学当他们走上工作岗位时可能面临大量多样而又复杂的数学物理问题需要他们解算．"陈法"照搬并不总是行得通的，但我们提供的解决问题的基本思想方法与原理原则，对他们可能具有更加实际的意义．

关于区域分裂法的文献不多．我们主要参考Л. В. Канторович 与В. И. Крылов的书«Приближенные методы высшего анализа»中的第七章以及С. Г. Михлин的书«二次泛函的极小化问题»．关于算子分裂法的文献甚多，这部分主要取材于Г. И. Марчук的书«Methods of Numerical Mathematics» 1975年版．

本书是为已具有数值分析的一般知识的读者而写的．例如已读过李荣华、冯果忱编«微分方程数值解法»一书的读者则看此书将无困难．

本书的第一部分由康立山与陈毓屏所写；第二部分由康立山、全惠云和孙乐林所写．限于著者的学识水平，书中缺点错误在所难免．如蒙指正，则非常感谢．

作者　1989年2月于武汉大学

目　录

第一部分　算子分裂法

引　言

算子分裂法将分两个部分介绍，先介绍解定常问题的算子分裂法，然后介绍非定常问题．而后者又分三个内容：一般的算子分裂理论；一些特殊的算子分裂的例子，其中包括交替方向法与局部一维化法等；弱逼近理论与算子分裂．这一部分还包括一些数值例子．

这里先介绍一些概念、记号与引理，它们在以后的章节里将要经常用到，其中大部分可能是大家熟知的．为统一起见，我们仍简述于下．

设有界区域$\Omega\subset R^n$（n维 Euclid 空间），其边界为Γ，$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$．

空间$L_2(\Omega)$：若

$$\left[\int_\Omega f^2 \mathrm{d}x\right]^{1/2}<\infty,$$

则
$$f\in L_2(\Omega).$$

内积

$$\left.\begin{aligned}(f_1, f_2)&=\int_\Omega f_1 f_2 \mathrm{d}x,\\ \langle f_1, f_2\rangle&=\int_\Gamma f_1 f_2 \mathrm{d}s,\end{aligned}\right\} f_1, f_2\in L_2(\Omega).$$

模
$$\|f\|=\sqrt{(f, f)}.$$

以后由于某种需要，在 $L_2(\Omega)$ 上再加某些附带条件，即选取 $L_2(\Omega)$ 的子空间。

空间 $H^m(\Omega)$ $(m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$：

$\alpha=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n)$（$\alpha_i$ 为非负整数），

$$D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\quad\left(|\alpha|=\sum_{i=1}^n\alpha_i\right),$$

若 $$D^\alpha f\in L_2(\Omega)\quad(|\alpha|\leqslant m),$$

则 $$f\in H^m(\Omega).$$

内积

$$(f_1,\ f_2)_m=\sum_{|\alpha|=0}^{m}(D^\alpha f_1,\ D^\alpha f_2),\ f_1,\ f_2\in H^m(\Omega).$$

模 $$\|f\|_m=\sqrt{(f,\ f)_m}.$$

$$H_\varphi^m(\Omega)=\{f\,|\,f\in H^m(\Omega);\ f=\varphi\ \text{于}\ \Gamma\ \text{上}\}.$$

考虑椭圆型方程

$$Au=f\qquad \text{于}\ \overline{\Omega}\ \text{内},\tag{1}$$

其中 A 是一个 m 阶线性微分算子，f 是 x 的函数，设 $f\in L_2(\Omega)$。求(1)的解“等价”于确定 u 使得

$$(Au-f,\ v)=0,\ \forall v\in L_2(\Omega).\tag{2}$$

这就需要 $u\in H^m(\Omega)$。A：$H^m(\Omega)\to L_2(\Omega)$。我们称 $L_2(\Omega)$ 的子空间 $H^m(\Omega)$ 为算子 A 的定义域，并记作 $\Phi(A)$。由于要求 $u\in H^m(\Omega)$，$v\in L_2(\Omega)$，故当 m 较大时，问题(2)的求解就困难一些。从计算的观点来看最好是降低对 u 的要求，以使 u 与 v 的光滑性要求差不多。通常这一目的可以通过对(2)的左端进行分部积分（当 $n=1$ 时）或应用 Green 定理（当 $n=2$ 时）来达到。

例如，当 $A=-\Delta$ 时（Δ 为 Laplace 算子），记

$$\nabla\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ \cdots,\ \frac{\partial}{\partial x_n}\right),$$

有 Green 公式

$$(\nabla u,\ \nabla v)=-(\Delta u,\ v)+\left\langle\frac{\partial u}{\partial n},\ v\right\rangle,$$
$$u\in H^2(\Omega),\ v\in H^1(\Omega), \tag{3}$$

其中 $\frac{\partial}{\partial n}$ 表示关于 Γ 的外法线方向的微商. 故当 $A=-\Delta$ 时，应用(3)后，(2)可化成

$$(\nabla u,\ \nabla v)-\left\langle\frac{\partial u}{\partial n},\ v\right\rangle=(f,\ v), \tag{4}$$

这时只要求 $u,\ v\in H'(\Omega)$ 即可.

当我们解 Poisson 方程的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}-\Delta u=f & 于\ \Omega\ 内,\\ u|_\Gamma=\varphi\end{cases} \tag{5}$$

时，其弱形式为：求 $u\in H^1_\varphi(\Omega)$ 使得

$$(\nabla u,\ \nabla v)=(f,\ v),\ \forall v\in H^1_0(\Omega). \tag{6}$$

这时 u 称为问题(5)在 Галеркин 意义下的弱解或广义解. 因为从计算的观点来看，解问题(6)要比解问题(5)容易些. 由于问题(5)要求 $u|_\Gamma=\varphi$，故我们要限制 $v\in H^1_0(\Omega)$. 但若为第三边值条件时，即

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\alpha u=\varphi\quad 于\ \Gamma\ 上, \tag{7}$$

则求弱解的问题就化成求 $u\in H^1(\Omega)$ 使得

$$(\nabla u,\ \nabla v)-\langle\varphi-\alpha u,\ v\rangle=(f,\ v),\ \forall v\in H^1(\Omega). \tag{8}$$

这样一来就不再需要另外考虑边界条件了，只需 $u,\ v\in H^1(\Omega)$ 即可. 这将给数值求解带来很大的方便.

一般地，若 $A:\Phi\to L_2(\Omega)$，则称 $L_2(\Omega)$ 的子空间 Φ 为算子 A 的定义域，记作 $\Phi(A)$. 下面对定义在线性流形 Φ 上的一个线性算子 A 作进一步的描述.

1．$A\geqslant 0$（A 为半定）：

若
$$(A\varphi,\ \varphi)\geqslant 0,\quad \forall\varphi\in\Phi,$$
且存在 $\varphi\in\Phi$，$\varphi\neq 0$ 使得
$$(A\varphi,\ \varphi)=0.$$

2．$A>0$（A 是正的）：

若
$$(A\varphi,\ \varphi)>0,\quad \forall\varphi\in\Phi \text{ 且 } \varphi\neq 0.$$

3．A 正定：

若存在常数 $\gamma>0$，使得
$$(A\varphi,\ \varphi)\geqslant\gamma(\varphi,\ \varphi),\quad \forall\varphi\in\Phi.$$

注　若 A 为对称矩阵，则由 $A>0$ 可知 A 正定.

4．A^*（A 的共轭算子）：

若满足 Lagrange 恒等式
$$(A\varphi,\ \psi)=(\varphi,\ A^*\psi),\quad \varphi\in\Phi(A),\ \psi\in\Phi(A^*).$$

以后我们总设 A 的共轭算子 A^* 是存在的，且在下述意义下是闭的：若序列 $\psi_n\to\psi$，$A^*\psi_n\to\omega$，则 $\psi\in\Phi(A^*)$，且有极限关系 $A^*\psi=\omega$.

5．A 是自共轭的：

若 $A=A^*$；$\Phi(A)=\Phi(A^*)$.

自共轭算子的一个性质：若 $\Phi(A)\equiv\Phi(A^*)$，则 $A>0$ 隐含着 $A^*>0$.

实际上，
$$(A\varphi,\ \psi)=(\varphi,\ A^*\psi)>0,\quad \forall\varphi,\ \psi\in\Phi(A).$$

例如，若 $A=-\Delta$，$\Phi(-\Delta)=H_0^2(\Omega)$，由(3)知
$$(-\Delta\varphi,\ \psi)=(\nabla\varphi,\ \nabla\psi)=(\varphi,\ -\Delta\psi),\quad \forall\varphi,\ \psi\in H_0^2(\Omega),$$
故 $-\Delta$ 是自共轭算子．当 $\varphi=\psi$ 时，上式变成
$$(-\Delta\varphi,\ \varphi)=(\nabla\varphi,\ \nabla\varphi),$$
只要 φ 不为常数，则必有 $(-\Delta\varphi,\ \varphi)>0$．又因 $\varphi\in H_0^2(\Omega)$，若

φ为常数，则$\varphi\equiv 0$. 故算子$(-\Delta)$是正的，即$-\Delta>0$.

若应用 Friedrichs 不等式*)：

$$(\nabla\varphi,\ \nabla\varphi)\geqslant\gamma(\varphi,\ \varphi),\ \varphi|_{\Gamma}=0,$$

就有
$$(-\Delta\varphi,\ \varphi)\geqslant\gamma(\varphi,\ \varphi),\ \forall\varphi\in H_0^2(\Omega),$$

即算子$(-\Delta)$在$H_0^2(\Omega)$上是正定的.

下面考虑 Fourier 级数问题. 它在后面的算法分析中起着重要作用.

若$A\geqslant 0$，考虑两个谱问题：

$$Au=\lambda(A)u, \tag{9}$$

$$A^*u^*=\lambda(A^*)u^*. \tag{10}$$

设齐方程(9)与(10)各产生一个完全的固有函数系，分别记作$\{u_n\}$与$\{u_n^*\}$，它们已标准化如下：

$$(u_n,\ u_m^*)=\begin{cases}1, & n=m\ \text{时},\\ 0, & n\neq m\ \text{时},\end{cases}$$

其相应的固有值$\lambda_n(A)\in[\alpha(A),\ \rho(A)]$. 这个完全固有函数系称为双正交基. 在完全性的假定下，任何函数$f\in\Phi(A)$与$f^*\in\Phi(A^*)$(为简单见，以后记$\Phi(A)$为Φ，记$\Phi(A^*)$为Φ^*)均可表成如下的 Fourier 级数形式：

$$f=\sum_n f_n u_n,$$

$$f^*=\sum_n f_n^* u_n^*.$$

其中
$$f_n=(f,\ u_n^*),\ f_n^*=(f^*,\ u_n).$$

例如，我们考察下述固有值问题：

$$\begin{cases}-\Delta u=\lambda u & \text{于 } \Omega=\{(x_1,\ x_2)\,|\,0<x_1,\ x_2<1\}\text{内},\\ u|_{\Gamma}=0.\end{cases}$$

---

*) 参阅 С. Г. Михлин, Вариационные Методы в Математической Физике, Гостехиздат, 1957, § 22.

它有一个完全的标准正交固有函数系

$$u_{mp}=2\sin m\pi x_1 \sin p\pi x_2,$$
$$m=1,\ 2,\ \cdots,$$
$$p=1,\ 2,\ \cdots.$$

其相应的固有值为

$$\lambda_{mp}(-\Delta)=(m^2+p^2)\pi^2,$$

故 $\lambda_{mp}(-\Delta)\in[2\pi^2,\ \infty]$，这时 $\alpha(-\Delta)=2\pi^2$，$\rho(-\Delta)=\infty$.

又
$$(-\Delta\varphi,\ \varphi)\geqslant 2\pi^2(\varphi,\ \varphi),$$

故$(-\Delta)$是正定的，这时 $\gamma=2\pi^2$.

对于 $\Phi(-\Delta)$中的任何函数 φ 可展成 Fourier 级数

$$\varphi(x_1,\ x_2)=\sum_m\sum_p \varphi_{mp}u_{mp},$$

其中
$$\varphi_{mp}=(\varphi,\ u_{mp}).$$

上述问题的 5 点差分模拟$\left(\text{取步长 } h=\dfrac{1}{N}\right)$:

$$\begin{cases} A^h u^h=\lambda u^h \quad \text{于} \quad \Omega_h(\Omega\text{ 上之网域}), \\ u^h|_{\Gamma_h}=0. \end{cases}$$

它有一个标准正交化固有向量$\{u_{mp}\}$*)，其分量为

$$u_{mp}^{kl}=2\sin m\pi kh\sin p\pi lh,$$
$$m=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1,$$
$$p=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1.$$

其中 k，l 是固有向量 u_{mp} 的分量标号. 它相应的固有值为

$$\lambda_{mp}(A^h)=\frac{4}{h^2}\left(\sin^2\frac{m\pi h}{2}+\sin^2\frac{p\pi h}{2}\right),$$

---

*) 这里定义的内积与模分别为

$$(u_{m_1p_1},\ u_{m_2p_2})=h^2\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{l=1}^{N-1}u_{m_1p_1}^{kl}u_{m_2p_2}^{kl},$$
$$\|u_{mp}\|^2=(u_{mp},\ u_{mp}).$$

故有 $\lambda_{mp}(A^h)\in\left[\frac{8}{h^2}\sin^2\frac{\pi h}{2},\ \frac{8}{h^2}\cos^2\frac{\pi h}{2}\right]$, 即

$$\alpha(A^h)=\frac{8}{h^2}\sin^2\frac{\pi h}{2},\ \ \rho(A^h)=\frac{8}{h^2}\cos^2\frac{\pi h}{2}.$$

当 h 充分小时，因 $\sin^2\frac{\pi h}{2}=\frac{\pi^2 h^2}{4}-O(h^4)$;

$$\cos^2\frac{\pi h}{2}=1-O(h^2),$$

故

$$\lambda_{\min}(A^h)=2\pi^2-O(h^2),$$

$$\lambda_{\max}(A^h)=\frac{8}{h^2}-O(1).$$

它们从下方逼近 $\lambda(-\Delta)$ 的界.

在算法分析中另一重要工作是对算子的模进行估计.

算子 A 的模定义如下:

$$\|A\|^2=\sup_{\substack{\varphi\in\Phi\\ \varphi\neq 0}}\frac{(A\varphi,\ A\varphi)}{(\varphi,\ \varphi)}=\sup_{\substack{\varphi\in\Phi\\ \varphi\neq 0}}\frac{(\varphi,\ A^*A\varphi)}{(\varphi,\ \varphi)}. \tag{11}$$

因为算子 $A^*A\geqslant 0$ 且为自共轭的，故它存在固有值 $\lambda_n(A^*A)\geqslant 0$ 及固有函数系 $\{u_n\}$，设它是完全标准正交的，则 φ 可表示为

$$\varphi=\sum_n \varphi_n u_n, \tag{12}$$

其中

$$\varphi_n=(\varphi,\ u_n).$$

将(12)代入(11)并利用 $\{u_n\}$ 的正交性即得

$$\|A\|^2=\sup_{\{\varphi_n\}\in Q}\frac{\sum_n \lambda_n(A^*A)\varphi_n^2}{\sum_n \varphi_n^2}, \tag{13}$$

其中 Q 是 Fourier 系数空间. 由(13)易知

$$\|A\|^2=\lambda_{\max}(A^*A)=\rho(A^*A), \tag{14}$$

它称为算子 A^*A 的谱半径. 一般谱半径是这样定义的:

$$\rho(A)=\sup\{|\lambda(A)|\}.$$

若 $A^*=A$，则由(14)可知

$$\rho(A)=\|A\|.$$

考虑 $L_2(\Omega)$ 上的一固定的闭正算子 C. 我们将称它为能量算子. 于是

$$(C\varphi,\ \varphi)>0,\ \forall\varphi\in\Phi(C),$$

且 $\Phi(C)$ 在 $L_2(\Omega)$ 中稠密，即对于任何元素 $f\in L_2(\Omega)$，存在元素 $g\in\Phi(C)$，使得 $\|f-g\|\leqslant\varepsilon$，其中 ε 为任意小的正小数. 若 $\Phi(C)=\Phi(C^*)$，则

$$(C^*\varphi,\ \varphi)=(\varphi,\ C\varphi)=(C\varphi,\ \varphi),\ \forall\varphi\in\Phi(C),$$

所以有
$$(C\varphi,\ \varphi)=\left(\frac{1}{2}[C+C^*]\varphi,\ \varphi\right),$$

其中 $\bar{C}=\dfrac{1}{2}[C+C^*]$ 是一个正的自共轭算子. 故可引进新的内积

$$(f,\ g)_C=(Cf,\ g)$$

与模

$$\|\varphi\|_C^2=(C\varphi,\ \varphi)=(\varphi,\ \varphi)_C=(\bar{C}\varphi,\ \varphi)=(\varphi,\ \varphi)_{\bar{C}}=\|\varphi\|_{\bar{C}}^2,$$

它称之为能量模.

对于能量模有估计式

$$\|\varphi\|_C^2\leqslant\|\bar{C}\|\,\|\varphi\|^2=\rho(\bar{C})\|\varphi\|^2.$$

最后，我们讨论一类特殊矩阵的模的估计. 它们将在考虑离散化后的算子分裂法时经常用到.

引理 1 若矩阵算子 $A\geqslant0$ 于 R^n 上，则对任何参数 $\sigma\geqslant0$，有估计式

$$\|(I+\sigma A)^{-1}\|\leqslant1,$$

其中 I 表示单位矩阵.

证

$$\|(I+\sigma A)^{-1}\|^2=\max_{\substack{\varphi\in R^n\\ \varphi\neq 0}}\frac{((I+\sigma A)^{-1}\varphi,\ (I+\sigma A)^{-1}\varphi)}{(\varphi,\ \varphi)},$$

作变换

$$\psi=(I+\sigma A)^{-1}\varphi, \tag{15}$$

则

$$\|(I+\sigma A)^{-1}\|^2=\max_{\substack{\psi\in R^n\\ \psi\neq 0}}\frac{(\psi,\ \psi)}{((I+\sigma A)\psi,\ (I+\sigma A)\psi)}$$

$$=\frac{1}{\min\limits_{\substack{\psi\in R^n\\ \psi\neq 0}}\left[1+2\sigma\dfrac{(A\psi,\ \psi)}{(\psi,\ \psi)}+\sigma^2\dfrac{(A\psi,\ A\psi)}{(\psi,\ \psi)}\right]}.$$

因 $A\geqslant 0$, $\sigma\geqslant 0$, 故上式右端的分母不小于 1, 引理得证.

注 若 $A>0$, $\sigma>0$, 则有

$$\|(I+\sigma A)^{-1}\|<1.$$

引理 2 (Kellogg 引理)若矩阵算子 $A\geqslant 0$ 于 R^n 上, 则对任何参数 $\sigma\geqslant 0$ 有估计式

$$\|(I-\sigma A)(I+\sigma A)^{-1}\|\leqslant 1.$$

证 注意到变换(15), 有

$$\|(I-\sigma A)(I+\sigma A)^{-1}\|^2$$

$$=\max_{\substack{\varphi\in R^n\\ \varphi\neq 0}}\frac{((I-\sigma A)(I+\sigma A)^{-1}\varphi,\ (I-\sigma A)(I+\sigma A)^{-1}\varphi)}{(\varphi,\ \varphi)}$$

$$=\max_{\substack{\psi\in R^n\\ \psi\neq 0}}\frac{((I-\sigma A)\psi,\ (I-\sigma A)\psi)}{((I+\sigma A)\psi,\ (I+\sigma A)\psi)}$$

$$=\max_{\substack{\psi\in R^n\\ \psi\neq 0}}\frac{(\psi,\ \psi)-2\sigma(A\psi,\ \psi)+\sigma^2(A\psi,\ A\psi)}{(\psi,\ \psi)+2\sigma(A\psi,\ \psi)+\sigma^2(A\psi,\ A\psi)}\leqslant 1.$$

引理得证.

注 1 若 $A>0$, $\sigma>0$, 则有

$$\|(I-\sigma A)(I+\sigma A)^{-1}\|<1.$$

注 2　若 $A \geqslant 0$, $\sigma \geqslant 0$, 则有

$$\|(I+\sigma A)^{-1}(I-\sigma A)\| \leqslant 1. \tag{16}$$

证　这只要注意到$(I+\sigma A)^{-1}$与$(I-\sigma A)$的可交换性即得. 实际上, 由恒等式

$$(I-\sigma A)^{-1}(I-\sigma A)=(I+\sigma A)(I+\sigma A)^{-1},$$

两端左乘$(I+\sigma A)^{-1}(I-\sigma A)$并注意到$(I+\sigma A)$与$(I-\sigma A)$可交换, 即得

$$(I+\sigma A)^{-1}(I-\sigma A)=(I-\sigma A)(I+\sigma A)^{-1}.$$

今后提到 Kellogg 引理时, 也包括估计式(16).

第 1 章

解定常问题的算子分裂法

解定常数学物理问题的算子分裂法的发生与发展是与解非定常问题的算子分裂法的研究紧密相连的．算子分裂法的最原始模型——隐式交替方向法 A. D. I. (alternating direction implicit method) 是 D. W. Peaceman, H. H. Rachford 及 J. Douglas 在 1955 年提出来的．因为解二维以上的初边值问题的显格式的不稳定性迫使人们从稳定性能较好的隐格式中找出路．高维问题的一般隐格式导出的方程组并不总是容易直接求解的，而当时人们对解一维问题的隐格式方程组却积累了很好的经验，特别是解具有对角优势的三对角方程组的追赶法十分有效，从而产生了 A. D. I. 算法．这个方法一出现就吸引了许多人，英美学者在这方面作了很多工作．几乎是在西方学者发展 A. D. I. 算法的同时，苏联学者 Самарский、Марчук、Яненко 等发展了一类解高维数学物理问题的"经济"格式，人们称之为局部一维化方法 L. O. D. (locally one dimensional method)．这类方法原是用于差分离散化格式的，后来也应用于变分离散化或变分-差分离散化格式．人们称这类算法为分裂法 (splitting method)．因为这类算法的基本思想是算子的分裂，其目的是将一个复杂的算子分裂成一些单一的算子，从而使一个复杂数学物理问题分裂成一系列较简单的问题来求解．算子分裂的方式则是多种多样的，有从算子降维来分裂(如交替方向法与局部一

维化法)；有的从算子各分量所反映的不同物理性质来分裂(如按扩散项与对流项分裂，或按大尺度量与小尺度量分裂等等)；也有按算子各分量的不同数学性质来分裂(如按线性项与非线性项来分裂等). 为了区别于"区域分裂法"，我们把这类分裂法统称为"算子分裂法".

有关算子分裂法的文献很多，而且这类方法应用到许多领域上. 为了集中介绍该方法的最本质部分，我们将不逐个地去讨论各种具体问题的各种具体格式，而是抓住算子分裂的共同特征，讲清算子分裂法的一般原理. 至于这些基本原理在具体的数学物理问题上的应用，我们则通过一些模型问题来说明.

在这一章里我们只讨论离散化后的数学物理问题的解法，而不管它们是用什么方法离散化的(差分法、有限元法或其他方法). 所以我们考虑的算子将是矩阵.

§1 简单迭代的格式

我们讨论线性代数方程

$$A\varphi=f \tag{1}$$

的解法，其中 A 是矩阵，φ 与 f 是向量. 设 $A>0$，谱 $\lambda(A)>0$.

通常解(1)之简单迭代格式如下：

$$\frac{\varphi^{j+1}-\varphi^j}{\tau_j}+A\varphi^j=f,\ \varphi^0=0, \tag{2}$$

$$j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

其中 τ_j 为迭代参数，通过压缩误差分量原理来优选 τ_j，使格式(2)收敛最快. 如简单迭代法、Чебышев 半迭代法等都是属于这种类型. 我们的目的是要推广这种迭代格式.

为了介绍这类格式的研究方法，我们从下述简单格式

$$\frac{\varphi^{j+1}-\varphi^{j}}{\tau}+A\,\frac{\varphi^{j+1}+\varphi^{j}}{2}=f,\ \varphi^{0}=0,\qquad (3)$$

$$j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,$$

开始讨论．这个格式仅含一个参数 τ．我们分两步讨论：先研究它的收敛性，然后再优选参数 τ．为此，把它改写成形式：

$$\left(I+\frac{\tau}{2}A\right)\varphi^{j+1}=\left(I-\frac{\tau}{2}A\right)\varphi^{j}+\tau f,\ \varphi^{0}=0,$$

$$j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

由于$\left(I+\frac{\tau}{2}A\right)$与 A 同等复杂，解上述方程的每一个都与解问题(1)同样困难，故格式(3)实际上是不好的．但它作为算法理论分析的格式却是很有用的．

我们从上式解出 φ^{j+1} 来得到显形式：

$$\varphi^{j+1}=\left(I+\frac{\tau}{2}A\right)^{-1}\left(I-\frac{\tau}{2}A\right)\varphi^{j}+\tau\left(I+\frac{\tau}{2}A\right)^{-1}f.\qquad (4)$$

由于 $A>0$，对于任何正数 τ，由 Kellogg 引理知有

$$\left\|\left(I+\frac{\tau}{2}A\right)^{-1}\left(I-\frac{\tau}{2}A\right)\right\|<1,$$

故迭代格式(3)对任何参数 $\tau>0$ 均收敛．

下面我们应用压缩误差分量原理来优选 τ，使格式(3)收敛得最快．

由于(1)之解 φ 满足(3)，因而也满足(4)，即

$$\varphi=\left(I+\frac{\tau}{2}A\right)^{-1}\left(I-\frac{\tau}{2}A\right)\varphi+\tau\left(I+\frac{\tau}{2}A\right)^{-1}f,\qquad (5)$$

(5)与(4)相减，并记 $\varepsilon^{j}=\varphi-\varphi^{j}$，则得误差向量 ε^{j} 的方程

$$\varepsilon^{j+1}=\left(I+\frac{\tau}{2}A\right)^{-1}\left(I-\frac{\tau}{2}A\right)\varepsilon^{j},\ \ \varepsilon^{0}=\varphi,\qquad (6)$$

$$j=0,\ 1,\ 2\cdots.$$

记
$$T_\tau=\left(I+\frac{\tau}{2}A\right)^{-1}\left(I-\frac{\tau}{2}A\right).$$

由(6)可得
$$\varepsilon^j=T_\tau^j\varepsilon^0. \tag{7}$$

设
$$\begin{cases} Au=\lambda u, \\ A^*u^*=\lambda^*u^* \end{cases}$$

确定一完全固有向量系 $\{u_n\}$，相应的固有值 $\lambda_n>0$, $\lambda_n\in[\alpha(A),\ \rho(A)]$，其 $\alpha(A)$ 与 $\rho(A)$ 分别为 A 之最小与最大固有值. 将 ε^0 按 A 的固有向量系展开:
$$\varepsilon^0=\sum_n\varepsilon_n^0u_n,$$

其中 $\varepsilon_n^0=(\varepsilon^0,\ u_n^*)$. 将它代入(7)得
$$\varepsilon^j=T_\tau^j\sum_n\varepsilon_n^0u_n=\sum_n\varepsilon_n^0T_\tau^ju_n=\sum_n\varepsilon_n^0\left(\frac{1-\frac{\tau}{2}\lambda_n}{1+\frac{\tau}{2}\lambda_n}\right)^ju_n.$$

若要使误差分量得到最佳压缩，必须选取 τ 使
$$\max_{\alpha(A)\leqslant x\leqslant\rho(A)}\left|\frac{1-\frac{\tau}{2}x}{1+\frac{\tau}{2}x}\right|=\min.$$

容易看出在所考虑的区间里函数
$$f(x)=\frac{1-\frac{\tau}{2}x}{1+\frac{\tau}{2}x}$$

关于 x 是单调的. 对于固定的 τ 它在区间的端点达到极值, 因此只要由下式来决定 τ 即可:

$$\max\left\{\left|\frac{1-\frac{\tau}{2}\alpha(A)}{1+\frac{\tau}{2}\alpha(A)}\right|,\quad\left|\frac{1-\frac{\tau}{2}\rho(A)}{1+\frac{\tau}{2}\rho(A)}\right|\right\}=\min.$$

由此可得

$$\tau=2/\sqrt{\alpha(A)\rho(A)}. \tag{8}$$

这时有

$$\|T_\tau\|=\frac{1-\frac{\tau}{2}\alpha(A)}{1+\frac{\tau}{2}\alpha(A)}=\frac{1-\sqrt{\alpha(A)/\rho(A)}}{1+\sqrt{\alpha(A)/\rho(A)}}.$$

这就是说，若按(8)选取参数 τ，则迭代 j 次后，初始误差的每一分量至少压缩 $\|T_\tau\|^j$ 倍．为了刻划这一迭代过程的渐近收敛速度，我们作内积 $(\varepsilon^{j+1},\ \varepsilon^{j+1})$，从(6)得

$$(\varepsilon^{j+1},\ \varepsilon^{j+1})=(T_\tau\varepsilon^j,\ T_\tau\varepsilon^j).$$

当 $j\to\infty$ 时，ε^j 中只有相应于系数含有 $\|T_\tau\|$ 的幂之分量占绝对优势．故有

$$\|\varepsilon^{j+1}\|^2=\|T_\tau\|^2\|\varepsilon^j\|^2,$$

即

$$\|\varepsilon^{j+1}\|=\|T_\tau\|\|\varepsilon^j\|.$$

一般地，我们定义渐近收敛速度为

$$s=\lim_{j\to\infty}\left(-\ln\frac{\|\varepsilon^{j+1}\|}{\|\varepsilon^j\|}\right). \tag{9}$$

当我们依(8)选取 τ 时，由(9)知迭代格式(3)有渐近敛速

$$s=-\ln\frac{1-\sqrt{\alpha(A)/\rho(A)}}{1+\sqrt{\alpha(A)/\rho(A)}}.$$

A 的情态数 $P(A)=\rho(A)/\alpha(A)$．当 $\alpha\ll\rho$ 时，即矩阵 A 为病态时，有

$$\|T_\tau\|\doteq 1-2/\sqrt{P}.$$

因此有渐近敛速

$$s=\ln\frac{1}{1-2/\sqrt{P}}\doteq\ln(1+2/\sqrt{P})\doteq 2/\sqrt{P}.$$

§2 简单的算子分裂：$A=A_1+A_2$

我们把迭代格式(2)推广到一般形式：

$$B\frac{\varphi^{j+1}-\varphi^j}{\tau_j}+A\varphi^j=f,\ \varphi^0=0, \tag{10}$$

$$j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,$$

其中 B 为某一正定矩阵.

设 $A>0$，这时(1)有唯一解 φ，我们分裂算子 A 为 $A=A_1+A_2$，且 $A_1>0$, $A_2>0$. 取 $\tau_j=\tau>0$,

$$B=\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right).$$

这样，(10)就取下述形式：

$$\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)\frac{\varphi^{j+1}-\varphi^j}{\tau}+A\varphi^j=f,\ \varphi^0=0, \tag{11}$$

$$j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

解出 φ^{j+1} 得

$$\varphi^{j+1}=\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)^{-1}\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)^{-1}\times\left[\left(I-\frac{\tau}{2}A_1\right)\left(I-\frac{\tau}{2}A_2\right)\varphi^j+\tau f\right].$$

下面证明迭代格式(11)的收敛性. 为此考虑误差向量 $\varepsilon^j=\varphi-\varphi^j$ 满足的方程：

$$\varepsilon^{j+1}=\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)^{-1}\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)^{-1}\left(I-\frac{\tau}{2}A_1\right)\times\left(I-\frac{\tau}{2}A_2\right)\varepsilon^j.$$

作变换
$$\bar{\varepsilon}^j=\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)\varepsilon^j,$$
则上式化成
$$\bar{\varepsilon}^{j+1}=\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)^{-1}\left(I-\frac{\tau}{2}A_1\right)\left(I-\frac{\tau}{2}A_2\right)\times\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)^{-1}\bar{\varepsilon}^j,$$
故有
$$\|\bar{\varepsilon}^{j+1}\|\leqslant\left\|\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)^{-1}\left(I-\frac{\tau}{2}A_1\right)\right\|\cdot\left\|\left(I-\frac{\tau}{2}A_2\right)\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)^{-1}\right\|\|\bar{\varepsilon}^j\|.$$
由 Kellogg 引理可知有
$$\left\|\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)^{-1}\left(I-\frac{\tau}{2}A_1\right)\right\|=r_1<1,$$
$$\left\|\left(I-\frac{\tau}{2}A_2\right)\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)^{-1}\right\|=r_2<1.$$
记 $r_1\cdot r_2=q<1$，故有
$$\|\bar{\varepsilon}^{j+1}\|\leqslant r_1r_2\|\bar{\varepsilon}^j\|=q\|\bar{\varepsilon}^j\|\leqslant q^2\|\bar{\varepsilon}^{j-1}\|\leqslant\cdots\leqslant q^{j+1}\|\bar{\varepsilon}^0\|.$$
当 $j\to\infty$ 时，有 $\|\bar{\varepsilon}^j\|\to0$，即
$$\left\|\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)\varepsilon^j\right\|\to0.$$
由于 $A_2>0$，故 $\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)$的逆存在，因此有 $\|\varepsilon^j\|\to0$。

即
$$\lim_{j\to\infty}\varphi^j=\varphi,$$
收敛性得证。

下面讨论参数 τ 的优选问题．由(11)得
$$\left(I+\frac{\tau}{2}A+\left(\frac{\tau}{2}\right)^2A_1A_2\right)\frac{\varphi^{j+1}-\varphi^j}{\tau}+A\varphi^j=f,$$

即 $$\frac{\varphi^{j+1}-\varphi^j}{\tau}+A\frac{\varphi^{j+1}+\varphi^j}{2}=f-\left(\frac{\tau}{2}\right)^2A_1A_2\frac{\varphi^{j+1}-\varphi^j}{\tau}.$$

由此可见，格式(11)是由格式(3)右端加上一个扰动项

$$-\left(\frac{\tau}{2}\right)^2A_1A_2\frac{\varphi^{j+1}-\varphi^j}{\tau}$$

得到的．当我们没有关于算子 A_1 与 A_2 的其他信息时，就取(8)作为迭代格式(11)的参数．由于格式是收敛的，故当 j 充分大时，扰动项就充分小．故可期望按(8)选择参数 τ 时格式(11)也有渐近敛速

$$s=2/\sqrt{P}.$$

下面给出格式(11)的实施算法如下：

1．$\xi^j=A\varphi^j-f$，$\xi^0=-f$；

2．$\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)\xi^{j+\frac{1}{3}}=\xi^j$；

3．$\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)\xi^{j+\frac{2}{3}}=\xi^{j+\frac{1}{3}}$；

4．$\varphi^{j+1}=\varphi^j-\tau\xi^{j+\frac{2}{3}}$，

$$j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

如果 A_1 与 A_2 的结构比 A 简单的话，则上述算法就比较容易实现些．如二维算子化成两个一维的算子；扩散-对流型的算子化成一个扩散、一个对流的两个算子，等等．

需要指出的是，到目前为止我们只知道 $A>0$，$A=A_1+A_2$，$A_1>0$，$A_2>0$，并不知道更多的信息．如果我们进一步假定 A_1 与 A_2 是可交换的且有共同的固有向量系，即有

$$A_1u_n=\lambda_n(A_1)u_n;$$
$$A_2u_n=\lambda_n(A_2)u_n;$$
$$Au_n=\lambda_n(A)u_n=[\lambda_n(A_1)+\lambda_n(A_2)]u_n;$$

则 ε^0 可依 $\{u_n\}$ 展开

$$\bar{\varepsilon}^0=\sum_n \bar{\varepsilon}_n^0 u_n,$$

从而有

$$\bar{\varepsilon}^j=\sum_n\left(\frac{1-\frac{\tau}{2}\lambda_n(A_1)}{1+\frac{\tau}{2}\lambda_n(A_1)}\right)^j\left(\frac{1-\frac{\tau}{2}\lambda_n(A_2)}{1+\frac{\tau}{2}\lambda_n(A_2)}\right)^j\bar{\varepsilon}_n^0 u_n.$$

若知 $\lambda_n(A_1)\in[\alpha(A_1),\ \rho(A_1)]$、$\lambda_n(A_2)\in[\alpha(A_2),\ \rho(A_2)]$，则优选 τ 的问题，就成求 τ 使

$$\max_{\substack{\alpha(A_1)\leqslant x\leqslant\rho(A_1)\\ \alpha(A_2)\leqslant y\leqslant\rho(A_2)}}\left|\left(\frac{1-\frac{\tau}{2}x}{1+\frac{\tau}{2}x}\right)\left(\frac{1-\frac{\tau}{2}y}{1+\frac{\tau}{2}y}\right)\right|=\min.$$

函数
$$f(x,\ y)=\left(\frac{1-\frac{\tau}{2}x}{1+\frac{\tau}{2}y}\right)\left(\frac{1-\frac{\tau}{2}x}{1+\frac{\tau}{2}y}\right),$$

当 τ 固定时，对固定的 y_0，$f(x,\ y_0)$是 x 的单调函数；对固定的 x_0，$f(x_0,\ y)$是 y 的单调函数．就第一个因子而言取 $\tau_1=2/\sqrt{\alpha(A_1)\rho(A_1)}$ 最好；就第二个因子则取

$$\tau_2=2/\sqrt{\alpha(A_2)\rho(A_2)}$$

最好．我们取其平均值

$$\tau=(\tau_1+\tau_2)/2=[\alpha(A_1)\rho(A_2)]^{-\frac{1}{2}}+[\alpha(A_2)\rho(A_2)]^{-\frac{1}{2}},$$

可以期望它有更大的渐近敛速． 特别，当 $\alpha(A_1)=\alpha(A_2)$、$\rho(A_1)=\rho(A_2)$时，即它们分别为 $\alpha(A)/2$ 与 $\rho(A)/2$，则取

$$\tau=\tau_1=\tau_2=4/\sqrt{\alpha(A)\rho(A)}.$$

这时，有
$$\|\bar{\varepsilon}^{j+1}\|=\left(\frac{1-\frac{1}{\sqrt{P}}}{1+\frac{1}{\sqrt{P}}}\right)^2\|\bar{\varepsilon}^j\|,$$

在 A 为病态时(即 $P(A)$ 充分大)有渐近敛速

$$s \doteq -\ln(1-2/\sqrt{P})^2 \doteq \ln(1+4/\sqrt{P}) \doteq 4/\sqrt{P}.$$

一般说来，对算子 A 的谱性质了解愈多，则可能构造出的迭代格式的收敛速率愈快. 例如对模型问题可以构造出迭代格式使 $s=c/\ln p$，其中 $c \doteq 1$.

从实用的观点出发，对 A 的谱信息作过多的要求是不现实的. 关于 A_1 与 A_2 的可交换的要求也是较苛刻的. 尽管在缺乏可交换性时我们还没有得到严格的敛速估计，但数值试验表明，在许多情形算子分裂有很好的效果.

§3 多重算子分裂的情形：$A=\sum_{i=1}^{m} A_i$

为了解高维数学物理问题，想要把问题局部一维化，往往要求把算子分裂成两个以上的简单算子. 设

$$A=\sum_{i=1}^{m} A_i,\ A_i>0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m.$$

迭代格式

$$B\,\frac{\varphi^{j+1}-\varphi^j}{\tau_j}+A\varphi^j=f \tag{12}$$

中的 B 取作

$$B=\prod_{i=1}^{m}(I+\sigma A_i). \tag{13}$$

若已知 $\alpha(A)$ 与 $\rho(A)$，则可取

$$\sigma=[\alpha(A)\rho(A)]^{-\frac{1}{2}}.$$

这时迭代格式可写成

$$\varphi^{j+1}=\varphi^j-\tau_j B^{-1}(A\varphi^j-f).$$

若已知 $\lambda(B^{-1}A)$ 的界，则可以根据 Чебышев 迭代法的原理来

优选 τ_j. 这时，可得下述实用算法：

1. $\xi^j = A\varphi^j - f$, $\xi^0 = -f$;

2. $(I+\sigma A_1)\,\xi^{j+\frac{i}{m+1}} = \xi^{j+\frac{i-1}{m+1}}$,

$$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m;$$

3. $\varphi^{j+1} = \varphi^j - \tau_j \xi^{j+\frac{m}{m+1}}$,

$$j = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots。$$

由此可见，迭代的每一步化成了如下步骤：先计算残向量 ξ^j，接着连续计算 m 个简单的隐格式，最后做一次简单的线性组合.

如果没有对 $\lambda(B^{-1}A)$ 的界的先验信息，则可利用计算过程中得到的信息来对参数 τ_j 进行优化. 下面就来讨论这种方法. 由(12)左乘以算子 B^{-1}（它是存在的），并令 $\xi^j = A\varphi^j - f$，即得

$$\frac{\varphi^{j+1}-\varphi^j}{\tau_j} + B^{-1}\xi^j = 0,\ \xi^0 = -f.$$

再将上式左乘以 $\tau_j A$ 即化成

$$A\varphi^{j+1} - A\varphi^j + \tau_j AB^{-1}\xi^j = 0.$$

它可写成 $(A\varphi^{j+1}-f) - (A\varphi^j - f) + \tau_j AB^{-1}\xi^j = 0.$

这样就得到残向量 ξ^j 的迭代格式：

$$\xi^{j+1} = (I - \tau_j AB^{-1})\xi^j,\ \xi^0 = -f.$$

作内积 $(\xi^{j+1},\ \xi^{j+1})$，则由上式得

$$(\xi^{j+1},\ \xi^{j+1}) = q(\tau_j)(\xi^j,\ \xi^j),$$

即

$$\|\xi^{j+1}\|^2 = q(\tau_j)\|\xi^j\|^2, \tag{14}$$

其中

$$q(\tau_j) = 1 - 2\,\frac{(AB^{-1}\xi^j,\ \xi^j)}{(\xi_j,\ \xi_j)}\,\tau_j + \frac{(AB^{-1}\xi^j,\ AB^{-1}\xi^j)}{(\xi^j,\ \xi^j)}\,\tau_j^2.$$

若 σ 已给定，则 B 亦固定. $q(\tau_j)$是 τ_j 的二次式. 由于 $q(\tau_j)\geqslant 0$，故存在极小值. 从

$$\frac{\mathrm{d}q(\tau_j)}{\mathrm{d}\tau_j}=0,$$

得

$$\tau_j=\frac{(AB^{-1}\xi^j,\ \xi^j)}{(AB^{-1}\xi^j,\ AB^{-1}\xi^j)}. \tag{15}$$

容易看出，当 $AB^{-1}>0$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}^2q(\tau_j)}{\mathrm{d}\tau_j^2}>0$. 由(14)可知，按(15)选取 τ_j 的确使残向量的模每一步都得到最佳压缩.

当 $\alpha(A)$ 与 $\rho(A)$ 已知时，当然可取 $\sigma=[\alpha(A)\rho(A)]^{-\frac{1}{2}}$. 若没有关于 A 的谱信息时，我们应该怎样来确定 σ 呢？这还是一个悬而未决的问题. 人们在计算中目前采用如下两种方式来确定 σ：一是使 σ 随着迭代的进程而变化

$$\sigma_j=\tau_{j-1};$$

另一是取

$$\sigma_j=\frac{1}{j-1}\sum_{i=1}^{j-1}\tau_i,\ j=2,\ 3,\ \cdots.$$

σ_1 要作特殊处理. 最简单的处理方式是取 $\sigma_1=0$. 这样，第一步就成了显式迭代.

总结上述过程，得到下述实施算法：

1. $\sigma_j=\tau_{j-1},\ \tau_0=0$;
2. $Y^{j+1}=B^{-1}\xi^j$，这一步用下述算法实现：

$$(I+\sigma_jA_1)Y^{j+\frac{1}{m}}=\xi^j,\ \xi^0=-f,$$

$$(I+\sigma_jA_i)Y^{j+\frac{i}{m}}=Y^{j+\frac{i-1}{m}},$$

$$i=2,\ 3,\ \cdots,\ m;$$

3. $Z^{j+1}=AY^{j+1}$;
4. $\tau_j=\dfrac{(Z^{j+1},\ \xi^j)}{(Z^{j+1},\ Z^{j+1})}$;

5. $\xi^{j+1}=\xi^{j}-\tau_j Z^{j+1}$;

6. $\varphi^{j+1}=\varphi^{j}-\tau_j Y^{j+1}$

$$j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

§4 奇异算子的情形

前面讨论的方程

$$A\varphi=f$$

里，算子 A 是正的且有正实谱.

然而，有些数学物理问题所导出的方程中的算子 A 是非负的奇异算子，即

$$(A\varphi,\ \varphi)\geqslant 0,\ \forall\varphi\in\Phi,$$

而且存在非零元素 $\varphi_0\in\Phi$ 使

$$(A\varphi_0,\ \varphi_0)=0.$$

显然 φ_0 是 A 的一个固有函数. 这时 A 的谱 $\lambda_n(A)\in[0,\ \rho(A)]$. 例如 Laplace 方程的 Neumann 问题或 Poincare 问题的差分或有限元模拟就是这种情形. 这时，$\varphi_0\equiv\text{const}$.

当 $A\geqslant 0$ 时，如果我们也采用前面介绍的迭代格式求解会发生什么问题呢？

当 $\alpha(A)=\min\limits_n\lambda_n(A)=0$ 时，前述各种方法将不收敛. 为了探索其发散的原因，我们来作些分析. 为简单起见，我们来考察一下简单的迭代格式：

$$\frac{\varphi^{j+1}-\varphi^{j}}{\tau}+A\varphi^{j}=f,\ \varphi^{0}=0, \tag{16}$$

$$j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

设谱问题

$$Au_n=\lambda_n(A)u_n,$$

$$A^* u_n^* = \lambda_n(A^*) u_n^*,$$

具有标准固有函数基$\{u_n\}$与$\{u_n^*\}$. 令

$$\varphi = \sum_n \varphi_n u_n,$$

$$f = \sum_n f_n u_n,$$

其中 $$\varphi_n = (\varphi,\ u_n^*);\ f_n = (f,\ u_n^*).$$

将它们代入(16),然后对 u_n^* 作内积, 即得到 Fourier 系数所满足的方程组:

$$\varphi_n^{j+1} = \varphi_n^j - \tau(\lambda_n \varphi_n^j - f_n),\ \varphi_n^0 = 0. \tag{17}$$

$$n = 0,\ 1,\ \cdots,\ N;\ j = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

因为 A 是奇异的,有 $\lambda_0 = 0$. 这时, 问题若有解存在, 则必有形式

$$\varphi = \sum_n \frac{f_n}{\lambda_n} u_n.$$

故 φ 存在的必要条件是 f 相应于 u_0 的 Fourier 系数必为 0, 即 $f_0 = 0$. 这时, 从(17)可导出

$$\varphi_n^j = \tau \frac{1 - q_n^j}{1 - q_n} f_n,\ \ \varphi_0^j = 0,$$

$$(n = 1,\ 2,\ \cdots,\ N.\ )$$

其中 $$q_n = 1 - \tau\lambda_n.$$

故有

$$\varphi^j = \sum_{n=1}^{N} [1 - (1 - \tau\lambda_n)^j] \frac{f_n}{\lambda_n} u_n. \tag{18}$$

若选取 τ 使 $$|1 - \tau\rho(A)| < 1,$$

则上式收敛到问题的解($j \to \infty$ 时):

$$\varphi^\infty = \lim_{j\to\infty} \varphi^j = \sum_{n=1}^{N} \frac{f_n}{\lambda_n} u_n = \varphi.$$

但是当我们实际按(16)进行计算时，就不能期望得到象(18)这样的近似解．由于计算过程不可避免地会有舍入误差出现．它会破坏 $f_0=0$ 这个条件．实际计算得的结果为

$$\varphi^j=\sum_{n=0}^{N}\varphi_n^j u_n,$$

其中 u_0 的系数 φ_0^j 因舍入误差的影响而不为0且具有因子 $\frac{f_0}{\lambda_0}$，导致算法不稳定．

为了保证迭代格式(16)产生(18)这种形式的近似解，则必须在迭代过程中不断清除分量 u_0 的干扰来达到收敛的目的．为了达到清除 u_0 这个强干扰方向，修正的算法必需提供 u_0 与 u_0^* 的信息．

值得指出的是：从(18)可见，不仅 $\lambda_0=0$ 会产生计算不稳定现象，实际上，由于舍入误差的影响，相应于 $\lambda_n=0$ 的那些方向 u_n 的系数 φ_n^j 都会受到振幅因子 $\frac{f_n}{\lambda_n}$ 的影响而使(16)失效．因为这时相应于 $\lambda_n=0$ 的那些方向 $\{u_n\}$ 张成一个强干扰子空间．

我们先设强干扰子空间是一维的，即仅有一个方向 u_0．若令 $\Phi_0=\Phi\backslash u_0$，则有

$$(A\varphi,\ \varphi)>0,\ \forall\varphi\in\Phi_0.$$

这样，当 A 限制在 Φ_0 中时，则它有正实谱：

$$\lambda_n(A)\in[\alpha^*(A),\ \rho(A)],\ \alpha^*(A)=\lambda_1(A)>0.$$

故在 Φ_0 中求解时一切计算将可正常进行．

怎样做到在 Φ_0 中求解呢？设已知 u_0，u_0^*，且 $(u_0,\ u_0^*)=1$．我们可用下述正交化手续清除强干扰方向 u_0 以保证迭代过程的计算稳定性．

$$\begin{cases}\varphi^{j+\frac{1}{2}}=\varphi^{j}-\tau(A\varphi^{j}-f),\\ \varphi^{j+1}=\varphi^{j+\frac{1}{2}}-(\varphi^{j+\frac{1}{2}},\ u_0^*)u_0,\end{cases}\tag{19}$$

$$j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

由此可知，φ^{j+1} 中已清除了干扰方向 u_0. 实际上，以 u_0^* 与(19)的第二式作内积得

$$(\varphi^{j+1},\ u_0^*)=(\varphi^{j+\frac{1}{2}},u_0^*)-(\varphi^{j+\frac{1}{2}},\ u_0^*)(u_0,\ u_0^*)=0.$$

即

$$\varphi_0^{j+1}=(\varphi^{j+1},\ u_0^*)=0.$$

这样一来，迭代格式(19)就可以达到近似解(18)了.

剩下的问题是怎样计算 u_0^* 与 u_0 以及如何对 τ 进行优化？这可应用 Люстерник 程序得到解决.

令

$$\omega^{(n+1)}=A\frac{\omega^{(n)}}{\|\omega^{(n)}\|},$$

则 A 的最大固有值可以由$\{\omega^{(n)}\}$取极限得到

$$\rho(A)=\lim_{n\to\infty}\|\omega^{(n)}\|.$$

一旦求得了 $\rho(A)$，则作新的算子

$$B=\rho I-A\ \text{及}\ B^*=\rho I-A^*.$$

作序列：

$$u^{(n)}=\frac{1}{c_n}Bu^{(n-1)};\quad u^{*(n)}=\frac{1}{c_n}B^*u^{*(n-1)}.$$

其中 $c_n=[|(Bu^{n-1},\ B^*u^{*(n-1)})|]^{1/2}$ 以保证序列$\{u^n\}$与$\{u^{*(n)}\}$满足标准化条件

$$(u^{(n)},\ u^{*(n)})=1.$$

显然，两个过程必须同时计算. 我们这样就得到

$$u_0=\lim_{n\to\infty}u^{(n)};\ u_0^*=\lim_{n\to\infty}u^{*(n)}.$$

为了优化算法，我们还要计算 $\alpha^*(A)$. 这只需在迭代过程中进行正交化手续：

$$v^{\left(n-\frac{1}{2}\right)}=B\frac{v^{(n-1)}}{\|v^{(n-1)}\|};\ v^{(n)}=v^{\left(n-\frac{1}{2}\right)}-\left(v^{\left(n-\frac{1}{2}\right)},\ u_0^*\right)u_0.$$

然后就可求得:

$$\alpha^*(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{\|Av^{(n)}\|}{\|v^{(n)}\|}.$$

这样一来,有了信息 u_0, u_0^* 及 $\alpha^*(A)$, $\rho(A)$, 我们就可以利用上几节中的各种算法了.

附带指出,当问题具有一个K维强干扰子空间S^k时($K>1$),只要应用 Крылов 方法来代替 Люстерник 方法求出 S^k 来,然后在空间 $\Phi_k=\Phi\backslash S^k$ 中求解,问题就变成稳定的了. 这时,计算过程要加上迭代序列与子空间 S^k 的正交化手续. 这里就不详细讨论了.

§5 原始数据不精确时的迭代算法

考虑线性代数问题

$$A\varphi=f, \tag{20}$$

其中 $A>0$, f 为已知.

到目前为止,我们总是假定矩阵 A 与右端向量 f 没有误差. 所以讨论其解法时总是默认原始数据是精确的. 然而,实践中我们应用的只是某种近似的原始数据,也就是说我们求解的不是方程组(20)而是其近似方程

$$A_h\varphi_h=f_h, \tag{21}$$

其中足标 h 表示与逼近误差与随机误差有关的信息. 我们将假定算子与向量的误差是已知的. 更确切地说,我们假定对这种误差有一个如下的先验估计:

$$\|(A-A_h)\varphi\|\leqslant\xi(h);\quad \|f-f_h\|\leqslant\eta(h). \tag{22}$$

现在要通过方程(21)与先验估计式(22)来求问题(20)之解. 我们只限于讨论简单迭代解法:

$$\varphi_h^{j+1}=\varphi_h^j-\tau(A_h\varphi_h^j-f_h),\ \varphi_h^0=\tau f_h, \tag{23}$$

$$(j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ )$$

这里我们假设参数 τ 满足条件

$$q=\|I-\tau A_h\|<1.$$

我们提出这样的问题:在已有估计(22)的情况下,迭代过程要进行到什么时候终止方合适呢? 过去我们总是使迭代过程进行到相继两次近似之间的差达到事先要求的误差界限时为止. 如果这时也这样确定迭代次数, 就有可能作些毫无意义的运算. 因为当近似解接近问题(21)对原问题(20)的逼近误差时, 再迭代下去就不能得到(对问题(20)的解而言)进一步的改善了. 这样一来,我们的问题就变成:原始数据的误差已知时(如先验估计式(22)),怎样确定最恰当的迭代次数,以致各类误差相匹配?

考虑问题(20)与(21)的形式上的解:

$$\varphi=A^{-1}f;\ \ \varphi_h=A_h^{-1}f_h.$$

由于

$$\begin{aligned}\varphi_h-\varphi&=A_h^{-1}[f_h-f+f]-A_h^{-1}A_h\varphi\\&=A_h^{-1}[f_h-f+(A-A_h)\varphi],\end{aligned}$$

顾及(22),故有

$$\begin{aligned}\|\varphi_h-\varphi\|&\leqslant\|A_h^{-1}\|[\|f_h-f\|+\|(A-A_h)\varphi\|]\\&\leqslant\|A_h^{-1}\|[\xi(h)+\eta(h)].\end{aligned}\tag{24}$$

另一方面,由(23)得:

$$\begin{aligned}\varphi_h^{j+1}&=(I-\tau A_h)\varphi_h^j+\tau f_h\\&=(I-\tau A_h)[(I-\tau A_h)\varphi_h^{j-1}+\tau f_h]+\tau f_h=\cdots\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=(I-\tau A_h)^{j+1}\varphi_h^0+\sum_{i=0}^{j}(I-\tau A_h)^i\tau f_h\\
&=\sum_{i=0}^{j+1}(I-\tau A_h)^i\tau f_h\\
&=[I-(I-\tau A_h)^{j+2}][I-(I-\tau A_h)]^{-1}\tau f_h\\
&=[I-(I-\tau A_h)^{j+2}]\varphi_h\\
&=\varphi_h-(I-\tau A_h)^{j+2}\varphi_h.
\end{aligned}
$$

移项即得 $\qquad \varphi_h-\varphi_h^{j+1}=(I-\tau A_h)^{j+2}A_h^{-1}f_h,$

因此有估计式

$$\|\varphi_h-\varphi^{j+1}\|\leqslant\|(I-\tau A_h)\|^{j+2}\|A_h^{-1}\|\|f_h\|=q^{j+2}\|A_h^{-1}\|\|f_h\|.$$

考虑到(24)及上式则有

$$
\begin{aligned}
\|\varphi-\varphi_h^{j+1}\|&=\|\varphi-\varphi_h+\varphi_h-\varphi_h^{j+1}\|\leqslant\|\varphi-\varphi_h\|+\|\varphi_h-\varphi_h^{j+2}\|\\
&\leqslant\|A_h^{-1}\|[\xi(h)+\eta(h)]+q^{j+2}\|A_h^{-1}\|\|f_h\|, \qquad (25)
\end{aligned}
$$

其中右端第一项表示原始数据的误差引起近似解对 φ 的误差之估计，第二项表示迭代过程的误差估计. 这两类误差应该相匹配，即它们应保持在同一个数量级上. 故可令

$$q^{j+2}\|f_h\|=\xi(h)+\eta(h)$$

来确定迭代次数. 由上式可得

$$j_0=\left[\frac{1}{1nq}\ln\frac{\xi(h)+\eta(h)}{f_h}-2\right], \qquad (26)$$

其中符号 $[x]$ 表示不小于 x 的最小整数. 由(25)可知，当原始数据有误差估计(22)时，依迭代格式(23)进行的迭代次数再多也只能有估计

$$\|\varphi-\varphi_h^{j+1}\|\leqslant\|A_h^{-1}\|[\xi(h)+\eta(h)].$$

而按(23)迭代 j_0 次就可以达到这一精度了.

第 2 章

非定常问题的算子分裂法(一)

§1 引　　言

我们准备分三章来介绍非定常问题的算子分裂法。首先介绍非定常问题的算子分裂法的一般理论，然后介绍一些具体数学物理问题的算子分裂格式及计算实例，最后介绍弱逼近理论在算子分裂法中的应用.

考虑数学物理中的发展问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}+A\varphi=f,\ (x,\ t)\in \Omega\times[0,\ T], \\ \varphi|_{t=0}=g, \qquad x\in\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $A\geqslant 0$, φ、f 及 g 均充分光滑. 此外还附加上某些边界条件. 相应的差分方程为

$$\begin{cases} \dfrac{\varphi^{j+1}-\varphi^j}{\tau}+A^j\,\dfrac{\varphi^{j+1}+\varphi^j}{2}=f^j, \\ \varphi^0=g. \end{cases} \tag{2}$$

如果 A^j 以近似的差分算子 Λ^j 来替代,则(2)化成线性代数方程:

$$\frac{\varphi^{j+1}-\varphi^j}{\tau}+\Lambda^j\,\frac{\varphi^{j+1}+\varphi^j}{2}=f^j,\ \varphi^0=g. \tag{3}$$

向量 φ^j 与 φ^{j+1} 的分量就表示它们在第 j 层与第 $j+1$ 层网点上的值. 设

$$(\Lambda^j\varphi,\ \varphi)\geqslant 0,\quad \forall\varphi\in\Phi_\tau\subset\Phi.$$

我们先讨论 $f=0$ 的情形．这时(3)可写成

$$\varphi^{j+1}=\left(I+\frac{\tau}{2}\Lambda^j\right)^{-1}\left(I-\frac{\tau}{2}\Lambda^j\right)\varphi^j.$$

其迁移算子 $\quad T_j=\left(I+\frac{\tau}{2}\Lambda^j\right)^{-1}\left(I-\frac{\tau}{2}\Lambda^j\right)$

由 Kellogg 引理知 $\|T_j\|\leqslant 1$．故有

$$\|\varphi^{j+1}\|\leqslant\|T_j\|\|\varphi^j\|\leqslant\|\varphi^j\|\leqslant\cdots\leqslant\|\varphi^0\|=\|g\|.$$

这就证明了格式(3)(在 $f=0$ 时)是稳定的．

若 $f\neq 0$, 则(3)可写成

$$\varphi^{j+1}=T_j\varphi^j+\tau\left(I+\frac{\tau}{2}\Lambda^j\right)^{-1}f^j.$$

由引理 1 知 $\qquad \left\|\left(I+\frac{\tau}{2}\Lambda^j\right)^{-1}\right\|\leqslant 1,$

故有

$$\begin{aligned}\|\varphi^{j+1}\|&\leqslant\|\varphi^j\|+\tau\|f^j\|\leqslant\|\varphi^{j-1}\|+\tau\|f^{j-1}\|+\tau\|f^j\|\\&\leqslant\cdots\leqslant\|g\|+\tau\sum_{i=0}^{j}\|f^i\|.\end{aligned}$$

若记 $\|f\|=\max\limits_j\|f^j\|$, 并注意到 $j\tau\leqslant T$, 则得

$$\|\varphi^{j+1}\|\leqslant\|g\|+j\tau\|f\|\leqslant\|g\|+T\|f\|.$$

其中 T 为求解时间区间的上界, 即 $t\in[0,\ T]$．上式给出了解的估计．它表明格式(3)关于初始条件及右端均稳定．

下面讨论格式(3)的逼近阶(关于时间 τ)．我们将 $(\varphi)^{j+1}$ 与 $(\varphi)^j$ 在 $t=\left(j+\frac{1}{2}\right)\tau$ 处展开成 Taylor 级数(其中 $(\varphi)^j$ 表示(1)的精确解 φ 在网域上的投影)

$$(\varphi)^{j+1}=(\varphi)^{j+\frac{1}{2}}+\frac{\tau}{2}(\varphi_t')^{j+\frac{1}{2}}+\frac{(\tau/2)^2}{2!}(\varphi_{tt}'')^{j+\frac{1}{2}}+o(\tau^3),$$

$$(\varphi)^{j}=(\varphi)^{j+\frac{1}{2}}-\frac{\tau}{2}(\varphi_t')^{j+\frac{1}{2}}+\frac{(-\tau/2)^2}{2!}(\varphi_{tt}'')^{j+\frac{1}{2}}+o(\tau^3),$$

故得

$$\frac{(\varphi)^{j+1}-(\varphi)^j}{\tau}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^{j+\frac{1}{2}}+O(\tau^2), \tag{4}$$

$$\frac{(\varphi)^{j+1}+(\varphi)^j}{2}=(\varphi)^{j+\frac{1}{2}}+O(\tau^2). \tag{5}$$

引进算子

$$\begin{cases} H\varphi\equiv\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}+A\varphi-f, \\ H_\tau^{j+\frac{1}{2}}(\varphi)^{j+\frac{1}{2}}=\dfrac{(\varphi)^{j+1}-(\varphi)^j}{\tau}+A^j\dfrac{(\varphi)^{j+1}+(\varphi)^j}{2}-(f)^{j+\frac{1}{2}}, \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\|(H\varphi)^{j+\frac{1}{2}}-H_\tau^{j+\frac{1}{2}}(\varphi)^{j+\frac{1}{2}}\|_{C_\tau}&=\|H_\tau^{j+\frac{1}{2}}(\varphi)^{j+\frac{1}{2}}\|_{C_\tau}\\ &=\max_{t_{j+\frac{1}{2}}}\|H_\tau^{j+\frac{1}{2}}(\varphi)^{j+\frac{1}{2}}\|,\end{aligned} \tag{7}$$

其中$\|\cdot\|$表示在网单元$(t=t_{j+\frac{1}{2}})$上的模. 注意，此处引进了中间网步$t_{j+\frac{1}{2}}=\left(j+\frac{1}{2}\right)\tau$，以简化逼近阶的估计. 顾及(6)，以(4)、(5)代入(7)得

$$\begin{aligned}&\|(H\varphi)^{j+\frac{1}{2}}-H_\tau^{j+\frac{1}{2}}(\varphi)^{j+\frac{1}{2}}\|_{C_\tau}\\ &=\max_{t_{j+\frac{1}{2}}}\left\|\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^{j+\frac{1}{2}}+(A)^{j+\frac{1}{2}}(\varphi)^{j+\frac{1}{2}}-(f)^{j+\frac{1}{2}}\right]\right.\\ &\qquad\left.-\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^{j+\frac{1}{2}}+A^j(\varphi)^{j+\frac{1}{2}}+f^j+O(\tau^2)\right]\right\|\\ &=\max_{t_{j+\frac{1}{2}}}\|[(A)^{j+\frac{1}{2}}-A^j](\varphi)^{j+\frac{1}{2}}-[(f)^{j+\frac{1}{2}}-f^j]\\ &\qquad+O(\tau^2)\|.\end{aligned} \tag{8}$$

若取

$$f^j=f(t_{j+\frac{1}{2}}),\quad A^j=A(t_{j+\frac{1}{2}}), \tag{9}$$

则由(8)知

$$\|(H\varphi)^{j+\frac{1}{2}}-H_{\tau}^{j+\frac{1}{2}}(\varphi)^{j+\frac{1}{2}}\|_{C_\tau}=O(\tau^2).$$

若注意到 $$(A)^{j+1}=(A)^{j+\frac{1}{2}}+\frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^{j+\frac{1}{2}}+O(\tau^2),$$

$$(A)^{j}=(A)^{j+\frac{1}{2}}-\frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^{j+\frac{1}{2}}+O(\tau^2),$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^{j}=\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^{j+\frac{1}{2}}-\frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}\right)^{j+\frac{1}{2}}+O(\tau^2),$$

则当我们取

$$A^j=[(A)^{j+1}+(A)^j]/2, \tag{10}$$

或取

$$A^j=(A)^j+\frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^j, \tag{11}$$

由(8)可知它们也同样得到二阶近似的格式，这是因为格式(3)属于 Crank-Nicolson 型. 对算子 A 具有二阶逼近度的公式(9)、(10)及(11)有很多应用，尤其是对拟线性方程的数值积分.

由此可见，对非定常问题而言，重要的是格式的稳定性与逼近阶. 只有既稳定又逼近的格式才能保证近似问题解的收敛性. 以后我们每构造一个新的格式时总要论证这两个方面.

现在来讨论一下定常问题与非定常问题之间的联系对我们下一步的学习是有帮助的. 因为我们已经讨论过关于解定常问题的一些算子分裂法，这些算法的基本思想可以应用到解非定常问题上来. 利用它们之间的"共性"，而把注意力集中到非定常问题的"特殊性"方面，就会事半功倍.

很多定常问题可以看作是非定常问题在 $t\to\infty$ 时的渐近

情形．例如定常问题

$$A\varphi=f. \tag{12}$$

设 $A:\Phi(A)\to F$，$f\in F$，它们都是 Hilbert 空间，而且于 Φ 上有 $A>0$．并设谱问题

$$\begin{cases}Au=\lambda u\\ A^*u^*=\lambda u^*\end{cases}$$

产生一组完全的双正交基$\{u_n\}$与$\{u_n^*\}$，相应的固有值 $\lambda_n>0$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$．对应于问题(12)，我们考虑非定常问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi}{\partial t}+A\psi=f,\\ \psi|_{t=0}=0.\end{cases} \tag{13}$$

这里我们不指明算子 $L=\dfrac{\partial}{\partial t}+A$ 的定义域，只假定问题(13)有可分离变量形式的解，而其空间部分(相对于时间部分而言)的基函数属于 $\Phi(A)$．也就是说，问题(12)与(13)的解可以表示成 Fourier 级数形式：

$$\varphi=\sum_n\varphi_n u_n,\quad f=\sum_n f_n u_n,$$

$$\psi=\sum_n\psi_n u_n,$$

其中
$$\varphi_n=(\varphi,\ u_n^*),\quad f=(f,\ v_n^*),$$

$$\psi_n=(\psi,\ u_n^*)(\text{它是 } t \text{ 的函数}).$$

将它们分别代入(12)与(13)，则得到 Fourier 系数之间的关系式：

$$\lambda_n\varphi_n=f_n$$

与
$$\begin{cases}\dfrac{d\psi_n}{dt}+A\psi_n=f_n,\\ \psi_n(0)=0.\end{cases}$$

解之，得
$$\varphi=\sum_n \frac{f_n}{\lambda_n} u_n,$$
$$\psi=\sum_n \frac{f_n}{\lambda_n}(1-e^{-\lambda_n t})u_n.$$
由此可见，当 $t\to\infty$ 时有
$$\lim_{t\to\infty}\psi=\varphi.$$

无怪乎上一章讨论过的解定常问题的迭代格式(3)
$$\frac{\varphi^{j+1}-\varphi^j}{\tau}+A\frac{\varphi^{j+1}+\varphi^j}{2}=f$$
就是我们这里用来解非定常问题的格式(2)．不过上式中的迭代参数 τ 在这里就成了时间步长．对定常问题而言，迭代过程的中间结果是无关紧要的，而非定常问题的每一瞬时的结果却有其物理意义．

§2　简单的算子分裂：$A=A_1+A_2$

首先我们讨论算子 A 与时间 t 无关的情形．我们将介绍两种方法：稳定化方法与预估校正法．当 $A=A(t)$时，则留待下一节讨论，那里将介绍第三个方法——按算子分量分裂法．

设 $A\geqslant 0$，$A=A_1+A_2$，$A_1\geqslant 0$，$A_2\geqslant 0$．我们还假定问题(1)的解充分光滑．在 A 与时间 t 无关时，我们仍用算子 A 的符号来表示它在差分化后的矩阵．

一、稳定化方法

先考虑齐方程($f=0$)的情形．设(1)的计算格式为
$$\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)\frac{\varphi^{j+1}-\varphi^j}{\tau}+A\varphi^j=0,\ \varphi^0=g.\quad(14)$$
为了研究它的逼近度，我们将它改写成

即 $$\left[I+\frac{\tau}{2}A+\left(\frac{\tau}{2}\right)^2A_1A_2\right]\frac{\varphi^{j+1}-\varphi^j}{\tau}+A\varphi^j=0,$$

$$\left(I+\frac{\tau^2}{4}A_1A_2\right)\frac{\varphi^{j+1}-\varphi^j}{\tau}+A\frac{\varphi^{j+1}+\varphi^j}{2}=0,\ \varphi^0=g.$$

将它与前面讨论过的 Crank-Nicolson 格式(2)

$$\frac{\varphi^{j+1}-\varphi^j}{\tau}+A\frac{\varphi^{j+1}+\varphi^j}{2}=0,\ \varphi^0=g$$

进行比较就知道它们仅相差含有 τ^2 因子的一项(当解 φ 充分光滑时). 而 Crank-Nicolson 格式关于 τ 是具有二阶精度的，故格式(14)也具有二阶精度.

下面研究它的稳定性. 为此将(14)改写成

$$\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)\varphi^{j+1}$$
$$=\left(I-\frac{\tau}{2}A_1\right)\left(I-\frac{\tau}{2}A_2\right)\varphi^j,\ \varphi^0=g.$$

解出 φ^{j+1} 得

$$\varphi^{j+1}=\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)^{-1}\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)^{-1}$$
$$\times\left(I-\frac{\tau}{2}A_1\right)\left(I-\frac{\tau}{2}A_2\right)\varphi^j,$$

作变换 $$\psi^j=\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)\varphi^j,$$

则上式变成 $$\psi^{j+1}=T\psi^j,$$

其中

$$T=\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)^{-1}\left(I-\frac{\tau}{2}A_1\right)\left(I-\frac{\tau}{2}A_2\right)\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)^{-1}.$$

因 $A_1\geqslant0,\ A_2\geqslant0,\ \tau>0$，由 Kellogg 引理可知

$$\|T\|\leqslant\left\|\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)^{-1}\left(I-\frac{\tau}{2}A_1\right)\right\|\cdot\left\|\left(I-\frac{\tau}{2}A_2\right)\right.$$

$$\times\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)^{-1}\Bigg\|\leqslant 1.$$

所以
$$\|\psi^{j+1}\|\leqslant\|T\|\|\psi^j\|\leqslant\|\psi^j\|.$$

代回原变量 φ^j 得

$$\left\|\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)\varphi^{j+1}\right\|\leqslant\left\|\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)\varphi^j\right\|.$$

引进能量模 $\left\|\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)\varphi\right\|=(c_2\varphi,\ \varphi)^{1/2}=\|\varphi\|_{c_2}$,

其中 $c_2=\left(I+\frac{\tau}{2}A_2^*\right)\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)$, 显然 $c_2>0$, $\|\cdot\|_{c_2}$ 诚然是一种能量模. 故有

$$\|\varphi^{j+1}\|_{c_2}\leqslant\|\varphi^j\|_{c_2}.$$

由此递推得到

$$\|\varphi^j\|_{c_2}\leqslant\|g\|.$$

这就证明了格式(14)是按能量模绝对稳定的.

总结上述: 若 $A_1\geqslant 0$, $A_2\geqslant 0$, 且其元素与 t 无关. 在(1)的解 φ 充分光滑的假定下, 格式(14)按能量模绝对稳定, 而且其解关于 τ 具有二阶精度.

格式(14)的计算程序:

1. $F^j=A\varphi^j,\ \varphi^0=g$;
2. $\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)\xi^{j+\frac{1}{2}}=-F^j$;
3. $\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)\xi^{j+1}=\xi^{j+\frac{1}{2}}$;
4. $\varphi^{j+1}=\varphi^j-\tau\xi^{j+1}$,

$$j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

程序的第一步是显式, 计算易于实现, 但它的稳定性差. 第二、三两步是隐式, 要求解两个具有较简单结构 A_1 与 A_2 的方程组. 但它们稳定性能好. 所以先用一次显式, 相继采用两次

隐式计算来使算法稳定化．故这类算法称为稳定化方法．

下面讨论 $f\neq 0$ 的情形．这时格式变成

$$\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)\frac{\varphi^{j+1}-\varphi^j}{\tau}+A\varphi^j=f^j,\ \varphi^0=g,\quad (15)$$

其中 $$f^j=(f)^{j+\frac{1}{2}}=f(t_{j+\frac{1}{2}}).$$

故它可保证格式(15)仍具有二阶精度．从上式解出 φ^{j+1}，并利用变换 $\psi^j=\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)\varphi^j$ 得

$$\psi^{j+1}=T\psi^j+\tau\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)^{-1}f^j.$$

顾及引理1，故有估计式

$$\begin{aligned}\|\psi^{j+1}\|&\leqslant\|T\|\|\psi^j\|+\tau\left\|\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)^{-1}\right\|\|f^j\|\\&\leqslant\|\psi^j\|+\tau\|f^j\|=\|\psi^j\|\\&\quad+\tau\left\|\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)^{-1}\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)f^j\right\|\\&\leqslant\|\psi^j\|+\tau\left\|\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)^{-1}\right\|\left\|\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)f^j\right\|\\&\leqslant\|\psi^j\|+\tau\|f^j\|_{C_{A_2}}.\end{aligned}$$

代回原来的变量 φ^j 就得到

$$\|\varphi^{j+1}\|_{C_2}\leqslant\|\varphi^j\|_{C_2}+\tau\|f^j\|_{C_2}.$$

利用上式进行递推并引用记号 $\max\limits_j\|f^j\|_{C_2}=\|f\|_{C_2}$，则得到估计式

$$\|\varphi^j\|_{C_2}\leqslant\|g\|_{C_2}+j\tau\|f\|_{C_2}.$$

因 $j_\tau=t_j$ 有界．上式表明，格式(15)按能量模关于右端及初始条件绝对稳定，且其解具有二阶精度(关于 τ)．这时计算程序只要将齐方程情况下的第一步代之以

$$F^j=A\varphi^j-f^j$$

即可.

二、预估校正法

预估校正法的特点是每一步中，从 t_j 到 t_{j+1}，先粗糙地预估一下解在中间点 $t_{j+\frac{1}{2}}=t_j+\frac{\tau}{2}$ 上的值(只具有一阶精度)，但这一步格式具有很好的稳定性能；然后用具有二阶精度的显式来完成从 t_j 到 t_{j+1} 的求解过程，对粗糙的预估值进行校正. 其格式为：

预估
$$\begin{cases}\dfrac{\varphi^{j+\frac{1}{4}}-\varphi^j}{\tau/2}+A_1\varphi^{j+\frac{1}{4}}=f^j, \quad \varphi^0=g,\\[2ex] \dfrac{\varphi^{j+\frac{1}{2}}-\varphi^{j+\frac{1}{4}}}{\tau/2}+A_2\varphi^{j+\frac{1}{2}}=0,\end{cases}$$

校正
$$\frac{\varphi^{j+1}-\varphi^j}{\tau}+A\varphi^{j+\frac{1}{2}}=f^j,$$
$$j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

其中
$$f^j=f(t_{j+\frac{1}{2}}).$$

为简单起见，我们先讨论 $f=0$ 的情形. 这时，从预估式中消去 $\varphi^{j+\frac{1}{4}}$ 得

$$\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)\varphi^{j+\frac{1}{2}}=\varphi^j, \tag{16}$$

即

$$\varphi^{j+\frac{1}{2}}=\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)^{-1}\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)^{-1}\varphi^j. \tag{17}$$

因 $A_1\geqslant 0$, $A_2\geqslant 0$ 及 $\tau>0$，利用引理 1 得估计式

$$\|\varphi^{j+\frac{1}{2}}\|\leqslant\left\|\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)^{-1}\right\|\left\|\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)^{-1}\right\|\|\varphi^j\|\leqslant\|\varphi^j\|.$$

所以预估格式的稳定性能良好. 将 $(\varphi)^j$ 在 $t=t_{j+\frac{1}{2}}$ 处的

Taylor 展式代入(16)容易验证依(16)预估得到的 $\varphi^{j+\frac{1}{2}}$ 只具有一阶精度.

由(4)易知校正格式是具有二阶精度的. 但由于 $\varphi^{j+\frac{1}{2}}$ 只是预估的,故一般说来这样求得的解 φ^{j+1} 也只有一阶精度. 如果进一步假定

$$\frac{\tau}{2}\|A_i\|<1,\ i=1,\ 2, \tag{18}$$

则可证明预估校正格式具有二阶精度. 实际上, 将(17)代入校正格式得

$$\frac{\varphi^{j+1}-\varphi^j}{\tau}+A\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)^{-1}\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)^{-1}\varphi^j=0,\ \varphi^0=g. \tag{19}$$

它可写成形式

$$\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)\frac{\varphi^{j+1}-\varphi^j}{\tau}+\bar{A}\varphi^j=0, \tag{20}$$

其中

$$\bar{A}=\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)A\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)^{-1}\times\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)^{-1}.$$

由条件(18)知成立展开式

$$\left(I+\frac{\tau}{2}A_i\right)^{-1}=I-\frac{\tau}{2}A_i+\left(\frac{\tau}{2}\right)^2A_i^2-\left(\frac{\tau}{2}\right)^3A_i^3+\cdots\quad(i=1,\ 2),$$

故有

$$\bar{A}=A+O(\tau^2),$$

以此代入(20)再与稳定化方法(14)比较即知它具有二阶精度.

下面讨论其稳定性. 为此作变换

$$\psi^j=\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)^{-1}\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)^{-1}\varphi^j,$$

则(19)化成

$$\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)\frac{\psi^{j+1}-\psi^j}{\tau}+A\psi^j=0,$$

这正是我们在稳定化方法里讨论过的(14). 它是按能量模 $\|\cdot\|_{C_2}$ 稳定的，故有

$$\|\psi^{j+1}\|_{C_2}\leqslant\|\psi^j\|_{C_2},$$

代回变量 φ^j 即得

$$\left\|\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)^{-1}\varphi^{j+1}\right\|\leqslant\left\|\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)^{-1}\varphi^j\right\|$$

即
$$\|\varphi^{j+1}\|_{\sigma_1^{-1}}\leqslant\|\varphi^j\|_{\sigma_1^{-1}},$$

其中
$$c_1^{-1}=\left(I+\frac{\tau}{2}A_1^*\right)^{-1}\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)^{-1}.$$

由此得到解的能量模估计

$$\|\varphi^j\|_{\sigma_1^{-1}}\leqslant\|g\|_{\sigma_1^{-1}}.$$

当 $f\neq0$ 时，由于我们取 $f^j=f(t_{j+\frac{1}{2}})$，故格式仍具有二阶精度. 若记

$$T_i=I+\frac{\tau}{2}A_i\quad(i=1,\ 2),$$

则由预估格式中消去 $\varphi^{j+\frac{1}{4}}$ 得

$$\varphi^{j+\frac{1}{2}}=T_2^{-1}T_1^{-1}\varphi^j+\frac{\tau}{2}T_2^{-1}T_1^{-1}f^j,$$

以此代入校正格式得

$$\frac{\varphi^{j+1}-\varphi^j}{\tau}+AT_2^{-1}T_1^{-1}\varphi^j=f^j-\frac{\tau}{2}AT_2^{-1}T_1^{-1}f^j.$$

作变换 $\psi^j=T_1^{-1}\varphi^j$, $F^j=T_1^{-1}f^j$，则上式化成

$$T_1\frac{\psi^{j+1}-\psi^j}{\tau}+AT_2^{-1}\psi^j=T_1F^j-\frac{\tau}{2}AT_2^{-1}F^j.$$

解出 ψ^{j+1} 得

$$\psi^{j+1}=(I-\tau T_1^{-1}AT_2^{-1})\psi^j+\tau\left(I-\frac{\tau}{2}T_1^{-1}AT_2^{-1}\right)F^j. \quad (21)$$

因为

$$\begin{aligned}I-\tau T_1^{-1}AT_2^{-1}&=T_1^{-1}(T_1T_2-\tau A)T_2^{-1}\\&=T_1^{-1}\left(I-\frac{\tau}{2}A_1\right)\left(I-\frac{\tau}{2}A_2\right)T_2^{-1},\end{aligned} \quad (22)$$

由 Kellogg 引理知

$$\left\|T_1^{-1}\left(I-\frac{\tau}{2}A_1\right)\left(I-\frac{\tau}{2}A_2\right)T_2^{-1}\right\|\leqslant 1. \quad (23)$$

由(22)得

$$I-\frac{\tau}{2}T_1^{-1}AT_2^{-1}=\frac{1}{2}\left[I+T_1^{-1}\left(I-\frac{\tau}{2}A_1\right)\left(I-\frac{\tau}{2}A_2\right)T_2^{-1}\right] \quad (24)$$

以(22)、(24)代入(21)并顾及(23)即得估计式

$$\|\psi^{j+1}\|\leqslant\|\psi^j\|+\tau\|F^j\|,$$

代回原变量即得

$$\|\varphi^{j+1}\|_{\sigma_1^1}\leqslant\|\varphi^j\|_{\sigma_1^1}+\tau\|f^j\|_{\sigma_1^1}.$$

若记 $\|f\|_{\sigma_1^1}=\max\limits_j\|f^j\|_{\sigma_1^1}$，则得

$$\|\varphi^j\|_{\sigma_1^1}\leqslant\|g\|_{\sigma_1^1}+j\tau\|f\|_{\sigma_1^1}.$$

即预估校正格式按能量模关于右端及初始条件绝对稳定.

应该指出的是条件(18)是十分苛刻的.例如对模型问题，若取 $A_1=\frac{1}{h^2}\{-1,\ 2,\ -1\}$(三对角矩阵).有 $\left\|\frac{\tau}{2}A_1\right\|\doteq\frac{4\tau}{h^2}$. 只有当 $\tau<\frac{h^2}{4}$ 时才能满足条件(18). 实际上这是难于接受

的.

综合上述:在 $A>0$, $A_1>0$, $A_2>0$, 且 A 与时间 t 无关的假定下,预估校正格式一般具有一阶精度. 但是计算稳定. 在满足条件(18)时它具有二阶精度.

预估校正格式可用下述程序来实现:

预估
$$\begin{cases} 1.\ \left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)\varphi^{j+\frac{1}{4}}=\varphi^j+\frac{\tau}{2}f^j, \quad \varphi^0=g; \\ 2.\ \left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)\varphi^{j+\frac{1}{2}}=\varphi^{j+\frac{1}{4}}+\frac{\tau}{2}f^j; \end{cases}$$

校正 3. $\varphi^{j+1}=\varphi^j-\tau A\varphi^{j+\frac{1}{2}}$,

$$j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

本节是在 A 与时间无关的假定下进行稳定性分析的. 不幸的是当 $A=A(t)$时,类似的稳定性分析一般尚未作到.

§3 $A=A_1+A_2$ 时按分量分裂法

这一节我们讨论 $A=A(t)$的情形. 这里将介绍按算子的分量分裂法. 这个方法是我们研究的重点,请读者予以足够的重视.

我们仍设 $A_1\geqslant 0$, $A_2\geqslant 0$. 在 $t\in[t_j,\ t_{j+1}]$时段里,差分矩阵取下述逼近:

$$A_i^j=A_i(t_{j+\frac{1}{2}}),\quad i=1,\ 2.$$

设其元素充分光滑.

先讨论齐方程($f=0$)的情形. Яненко 曾提出一种按算子分量分裂的差分格式,它由两个简单的 Crank-Nicolson 格式组成:

$$\begin{cases} \dfrac{\varphi^{j+\frac{1}{2}}-\varphi^{j}}{\tau}+\Lambda_1^j\dfrac{\varphi^{j+\frac{1}{2}}+\varphi^{j}}{2}=0, \\ \dfrac{\varphi^{j+1}-\varphi^{j+\frac{1}{2}}}{\tau}+\Lambda_2^j\dfrac{\varphi^{j+1}+\varphi^{j+\frac{1}{2}}}{2}=0. \end{cases} \tag{25}$$

从中消去辅助变量 $\varphi^{j+\frac{1}{2}}$，得

$$\varphi^{j+1}=T^j\varphi^j, \tag{26}$$

其中

$$T^j=\left(I+\frac{\tau}{2}\Lambda_2^j\right)^{-1}\left(I-\frac{\tau}{2}\Lambda_2^j\right)\left(I+\frac{\tau}{2}\Lambda_1^j\right)^{-1}\left(I-\frac{\tau}{2}\Lambda_1^j\right).$$

若 $\frac{\tau}{2}\|\Lambda_i^j\|<1$, $i=1, 2$, 则利用$\left(I+\frac{\tau}{2}\Lambda_i^j\right)^{-1}$ 的幂级矩阵展式得

$$T^j=I-\tau\Lambda^j+\frac{\tau^2}{2}[(\Lambda_1^j)^2+2\Lambda_2^j\Lambda_1^j+(\Lambda_2^j)^2]-\cdots. \tag{27}$$

代入(26)，再利用 φ^{j+1} 及 φ^j 在 $t=t_{j+\frac{1}{2}}$ 处的 Taylor 展式得

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^{j+\frac{1}{2}}-\Lambda^j\varphi^{j+\frac{1}{2}}+O(\tau)=0,$$

即格式(25)只具有一阶精度. 若进一步假定 Λ_1^j 与 Λ_2^j 可交换，则(27)变成

$$T^j=I-\tau\Lambda^j+\frac{\tau^2}{2}(\Lambda^j)^2-O(\tau^3),$$

将它代入(26)，并利用解 φ^j 及 φ^{j+1} 在 $t=t_{j+\frac{1}{2}}$ 处的 Taylor 展式和方程$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^{j+\frac{1}{2}}=-A(t_{j+\frac{1}{2}})(\varphi)^{j+\frac{1}{2}}$ 得

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^{j+\frac{1}{2}}+\Lambda^j\varphi^{j+\frac{1}{2}}+O(\tau^2)=0,$$

即格式(25)这时具有二阶精度.

应用 Kellogg 引理知 $\|T^j\|\leqslant 1$. 故格式(25)绝对稳定. 但正如我们在上节末尾指出过的，条件 $\frac{\tau}{2}\|A_i^j\|<1$ 是苛刻的. 故在一般情况下，尽管解 φ 充分光滑而格式只具有一阶精度.

为了改进(25)，考虑时段 $t\in[t_{j-1}, t_{j+1}]$，这时取

$$A_i^j=A_i(t_j),\ i=1,\ 2.$$

考察按算子分量分裂的对称格式(二循环对称分裂格式)：

$$\begin{cases}\dfrac{\varphi^{j-\frac{1}{2}}-\varphi^{j-1}}{\tau}+A_1^j\dfrac{\varphi^{j-\frac{1}{2}}+\varphi^{j-1}}{2}=0,\\ \dfrac{\varphi^{j}-\varphi^{j-\frac{1}{2}}}{\tau}+A_2^j\dfrac{\varphi^{j}+\varphi^{j-\frac{1}{2}}}{2}=0,\end{cases}\quad \text{当 } t\in[t_{j-1},\ t_j];$$

$$\begin{cases}\dfrac{\varphi^{j+\frac{1}{2}}-\varphi^{j}}{\tau}+A_2^j\dfrac{\varphi^{j+\frac{1}{2}}+\varphi^{j}}{2}=0,\\ \dfrac{\varphi^{j+1}-\varphi^{j+\frac{1}{2}}}{\tau}+A_1^j\dfrac{\varphi^{j+1}+\varphi^{j+\frac{1}{2}}}{2}=0,\end{cases}\quad \text{当 } t\in[t_j,\ t_{j+1}].$$

计算轮流使用这两组公式. 由此格式中消去中间变量 $\varphi^{j-\frac{1}{2}}$, φ^j 及 $\varphi^{j+\frac{1}{2}}$ 后得：

$$\varphi^{j+1}=T_j\varphi^{j-1},$$

其中

$$\begin{aligned}T_j=&\left(I+\frac{\tau}{2}A_1^j\right)^{-1}\left(I-\frac{\tau}{2}A_1^j\right)\\&\times\left[\left(I+\frac{\tau}{2}A_2^j\right)^{-1}\left(I-\frac{\tau}{2}A_2^j\right)\right]^2\left(I+\frac{\tau}{2}A_1^j\right)^{-1}\\&\times\left(I-\frac{\tau}{2}A_1^j\right).\end{aligned}$$

因 $A_i^j\geqslant 0$, 由 Kellogg 引理知 $\|T_j\|\leqslant 1$. 故有

$$\|\varphi^{j+1}\|\leqslant\|T_j\|\|\varphi^{j-1}\|\leqslant\|\varphi^{j-1}\|.$$

由此推出 $$\|\varphi^j\|\leqslant\|g\|,$$
即格式是绝对稳定的.

若设 $\frac{\tau}{2}\|A_i^j\|<1$, 则利用 $\left(I+\frac{\tau}{2}A_i^j\right)^{-1}$ 的幂展式得

$$T_j=I-2\tau A^j+\frac{(2\tau)^2}{2}(A^j)^2-\cdots.$$

将它与具有二阶精度的 Crank-Nicolson 格式

$$\frac{\varphi^{j+1}-\varphi^j}{2\tau}+A^j\,\frac{\varphi^{j+1}+\varphi^{j-1}}{2}=0$$

比较，则知二循环对称分裂格式与区间 $[t_{j-1},\ t_{j+1}]$ 上的Crank-Nicolson 格式具有同阶精度，而不管 A_1^j 与 A_2^j 是否可交换.

综合上述：若 $A_1(t)\geqslant0$, $A_2(t)\geqslant0$, 且它们的元素像问题(1)之解 φ 一样充分光滑，则二循环对称分裂格式绝对稳定，且在条件：$\frac{\tau}{2}\|A_i^j\|<1$ 下具有二阶精度(关于 τ).

二循环对称分裂格式的计算程序是单一的：

1. $\left(I+\frac{\tau}{2}A_1^j\right)\varphi^{j-\frac{1}{2}}=\left(I-\frac{\tau}{2}A_1^j\right)\varphi^{j-1},\ \varphi^0=g;$

2. $\left(I+\frac{\tau}{2}A_2^j\right)\varphi^j=\left(I-\frac{\tau}{2}A_2^j\right)\varphi^{j-\frac{1}{2}};$

3. $\left(I+\frac{\tau}{2}A_2^j\right)\varphi^{j+\frac{1}{2}}=\left(I-\frac{\tau}{2}A_2^j\right)\varphi^j;$

4. $\left(I+\frac{\tau}{2}A_1^j\right)\varphi^{j+1}=\left(I-\frac{\tau}{2}A_1^j\right)\varphi^{j+\frac{1}{2}}.$

$$(j=1,\ 3,\ 5,\ \cdots.\ )$$

下面讨论 $f\neq0$ 的情形. 这时我们取 $f^j=f(t_j)$. 二循环对称分裂格式取如下形式：

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\varphi^{j-\frac{1}{2}}-\varphi^{j-1}}{\tau}+\Lambda_1^j\frac{\varphi^{j-\frac{1}{2}}+\varphi^{j-1}}{2}=0;\\
&\frac{\varphi^{j}-\varphi^{j-\frac{1}{2}}}{\tau}+\Lambda_2^j\frac{\varphi^{j}+\varphi^{j-\frac{1}{2}}}{2}=f^j+\frac{\tau}{2}\Lambda_2^jf^j;\\
&\frac{\varphi^{j+\frac{1}{2}}-\varphi^{j}}{\tau}+\Lambda_2^j\frac{\varphi^{j+\frac{1}{2}}+\varphi^{j}}{2}=f^j-\frac{\tau}{2}\Lambda_2^jf^j;\\
&\frac{\varphi^{j+1}-\varphi^{j+\frac{1}{2}}}{\tau}+\Lambda_1^j\frac{\varphi^{j+1}+\varphi^{j+\frac{1}{2}}}{2}=0.
\end{aligned}
\right.
\tag{28}
$$

如果将这四个式子相加再除以 2, 就得一个有趣的格式:

$$
\frac{\varphi^{j+1}-\varphi^{j-1}}{2\tau}+\Lambda_1^j\frac{\varphi^{j-\frac{1}{2}}+\varphi^{j-1}+\varphi^{j+\frac{1}{2}}+\varphi^{j+1}}{4}
$$

$$
+\Lambda_2^j\frac{\varphi^{j-\frac{1}{2}}+2\varphi^j+\varphi^{j+\frac{1}{2}}}{4}=f^j.
$$

由于 Λ_1^j 与 Λ_2^j 分别作用在关于 $t=t_j$ 对称的点的函数的平均值上, 由解 φ 在 $t=t_j$ 处的 Taylor 展式可知

$$
\frac{\varphi^{j-\frac{1}{2}}+\varphi^{j+\frac{1}{2}}+\varphi^{j-1}+\varphi^{j+1}}{4}=\varphi^j+\frac{5\tau^2}{16}(\varphi_{tt})^j+O(\tau^4),
$$

$$
\frac{\varphi^{j-\frac{1}{2}}+2\varphi^j+\varphi^{j+\frac{1}{2}}}{4}=\varphi^j+\frac{\tau^2}{16}(\varphi_{tt})^j+O(\tau^4).
$$

将它们代入上式后与步长为 2τ 的 Crank-Nicolson 格式比较就知道它是具有二阶精度的(关于 τ). 这使我们想到在去掉条件 $\frac{\tau}{2}\|\Lambda_i^j\|<1$的限制后格式也可能具有二阶精度.

格式(28)的稳定性分析是很简单的. 只要从(28)中消去中间变量 $\varphi^{j-\frac{1}{2}}$, φ^j 与 $\varphi^{j+\frac{1}{2}}$ 就得到

$$
\varphi^{j+1}=T_j\varphi^{j-1}+2\tau T_1^jT_2^jf^j, \tag{29}
$$

其中 $T_i^j=\left(I+\frac{\tau}{2}\Lambda_i^j\right)^{-1}\left(I-\frac{\tau}{2}\Lambda_i^j\right)$, $i=1, 2$.

由 Kellogg 定理知 $\|T_i^j\|\leqslant 1$, 故得

$$\|\varphi^{j+1}\|\leqslant\|\varphi^{j-1}\|+2\tau\|f^j\|,\ j=1,\ 3,\ 5,\ \cdots.$$

若记 $\max\limits_j\|f^j\|=\|f\|$ 并注意到 $j\tau=t_j$ 的有界性，由上式递推得到解的估计式

$$\|\varphi^k\|\leqslant\|g\|+k\tau\|f\|,$$

其中 k 为偶数. 由此可知格式(28)关于右端及初始条件绝对稳定.

引入记号

$$S_i^j=\left(I+\frac{\tau}{2}\Lambda_i^j\right);\ R_i^j=\left(I-\frac{\tau}{2}\Lambda_i^j\right),\ i=1,\ 2.$$

则格式(28)的计算程序为:

1. $S_1^j\varphi^{j-\frac{1}{2}}=R_1^j\varphi^{j-1},\ \varphi^0=g;$
2. $S_2^j\varphi^j=R_2^j\varphi^{j-\frac{1}{2}}+\tau S_2^jf^j;$
3. $S_2^j\varphi^{j+\frac{1}{2}}=R_2^j(\varphi^j+\tau f^j);$
4. $S_1^j\varphi^{j+1}=R_1^j\varphi^{j+\frac{1}{2}}.$

$$(j=1,\ 3,\ 5,\ \cdots.)$$

它也可采用下述等价的更单一的计算程序:

1. $S_1^j\varphi^{j-\frac{2}{3}}=R_1^j\varphi^{j-1},\ \varphi^0=g;$
2. $S_2^j\varphi^{j-\frac{1}{3}}=R_2^j\varphi^{j-\frac{2}{3}};$
3. $\varphi^{j+\frac{1}{3}}=\varphi^{j-\frac{1}{3}}+2\tau f^j;$
4. $S_2^j\varphi^{j+\frac{2}{3}}=R_2^j\varphi^{j+\frac{1}{3}};$
5. $S_1^j\varphi^{j+1}=R_1^j\varphi^{j+\frac{2}{3}}.$

$$(j=1,\ 2,\ 3,\ \cdots.\ )$$

综合上述，若算子 $A_1(t)\geqslant 0$, $A_2(t)\geqslant 0$，且函数 $f(t)$ 及问题(1)的解均充分光滑，则格式(28)于 $t\in[0,\ T]$ 上绝对稳定，且以二阶精确度(关于 τ)逼近原问题.

到目前为止，我们已讨论过三种算子分裂法：稳定化方法、预估校正法及按算子分量分裂法．对此作如下注记：

第一，在 A, A_1 及 A_2 均与时间 t 无关，且 $A_1\geqslant 0$, $A_2\geqslant 0$ 及 $A_1A_2=A_2A_1$ 等假定下，文献里已有过完善的讨论．对于齐次发展方程(1)($f=0$)，上述三种算子分裂法都是彼此等价的，它们只是实现格式的形式不同罢了．特别是它们都可以写成如下形式：

$$\varphi^{j+1}=T\varphi^j,$$

其中

$$T=\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)^{-1}\left(I-\frac{\tau}{2}A_1\right)\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)^{-1}\left(I-\frac{\tau}{2}A_2\right).$$

至于对非齐发展方程($f\neq 0$)，仅就其逼近阶而言它们是彼此等价的，这就是说，它们虽然都以二阶精度逼近原问题，但不同的分裂格式会产生不同的计算结果．当然这种差别仅在 $O(\tau^2)$ 范围之内.

第二，在 $A_1\geqslant 0$, $A_2\geqslant 0$ 且均与时间 t 无关，但 A_1 与 A_2 不可交换时，三种分裂算法仍可求得非定常问题的近似解．虽然它们在精度阶上等价，但它们各有不同的考虑，甚至在 $f=0$ 的情形，它们的转移算子也是十分不同的．要肯定地讲这些算法中哪一个最有效还为期过早，因为这个问题还没有进行足够的分析．而事实是有了这三种不同的可供选用的算法，在需要求解复杂问题时可增强我们的信心.

第三，在更为一般的情形：算子 $A_1\geqslant 0$, $A_2\geqslant 0$，但它们与

时间 t 有关且又不可交换. 这时, 我们建议应用按算子分量的分裂法, 其二循环对称分裂格式给出解的二阶近似. 但也必须指出, 若算子 A_1 与 A_2 中至少有一个与时间无关时, 使用普通的一循环算法就能达到二阶精度.

§4 多重分量的算子分裂法

很多复杂的数学物理问题要求将算子 A 分裂成更多的算子分量. 一般有形状

$$A=\sum_{i=1}^{m} A_i,$$

其中 $A_i\geqslant 0$, $i=1, 2, \cdots, m$. 我们只讨论 $m>2$ 的情形, 因为当 $m=2$ 时我们在前面两节里已经讨论过了.

人们首先想到的是把前面讨论过的对于 $m=2$ 时的三种方法直接推广到 m 个算子分量的情形. 大家将会看到, 如果不加强条件的话, 这种推广将是不可能的.

我们暂设 A 与时间 t 无关.

一、稳定化方法

设 m 重算子分量的稳定化格式为:

$$\prod_{i=1}^{m}\left(I+\frac{\tau}{2}A_i\right)\frac{\varphi^{j+1}-\varphi^{j}}{\tau}+A\varphi^{j}=f^{j},\ \varphi_0=g, \tag{30}$$

其中
$$f^{j}=f\left(t_{j+\frac{1}{2}}\right).$$

这个格式的计算程序为

1. $\xi^{j}=-A\varphi^{j}+f^{j},\ \varphi^{0}=g;$

2. $\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)\xi^{j+\frac{i}{m+1}}=\xi^{j+\frac{i-1}{m+1}}$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m.\ );$$

3. $\varphi^{j+1}=\varphi^{j}+\tau\xi^{j+\frac{m}{m+1}}$

$$(j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.)$$

由此可见，计算是较容易实现的. 可以证明，当问题的解φ充分光滑时，稳定化方法具有二阶精度(关于τ). 实际上，因

$$\prod_{i=1}^{m}\left(I+\frac{\tau}{2}A_i\right)=\left[I+\frac{\tau}{2}A+\left(\frac{\tau}{2}\right)^2\sum_{i<j}A_iA_j+O(\tau^3)\right],$$

$$\frac{\varphi^{j+1}-\varphi^{j}}{\tau}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^{j+\frac{1}{2}}+O(\tau^2),$$

$$\varphi^{j}=\varphi^{j+\frac{1}{2}}-\frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^{j+\frac{1}{2}}+O(\tau^2),$$

将它们代入(30)得

$$\left[I+\frac{\tau}{2}A+o(\tau^2)\right]\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^{j+\frac{1}{2}}+O(\tau^2)\right]$$

$$+A\left[\varphi^{j+\frac{1}{2}}-\frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^{j+\frac{1}{2}}+O(\tau^2)\right]$$

$$=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^{j+\frac{1}{2}}+A\varphi^{j+\frac{1}{2}}+O(\tau^2),$$

故(30)具有二阶精度.

然而仅在$A_i\geqslant0(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$的条件下并不能保证格式的稳定性. 因为从(30)解出φ^{j+1}即得

$$\varphi^{j+1}=T\varphi^{j}+\tau\prod_{i=m}^{1}\left(I+\frac{\tau}{2}A_i\right)^{-1}f^{j},\tag{31}$$

其中
$$T=I-\tau\prod_{i=m}^{1}\left(I+\frac{\tau}{2}A_i\right)^{-1}A.$$

$A_i\geqslant0$并不能保证$\|T\|\leqslant1$.

如果$\|T\|\leqslant1$，则由引理1就可推得

$$\|\varphi^{j+1}\|\leqslant\|\varphi^{j}\|+\tau\|f^{j}\|.$$

若记$\|f\|=\max\limits_j\|f^j\|$，则由上式可递推得

$$\|\varphi^j\|\leqslant\|g\|+j\tau\|f\|.$$

因 $j\tau=t_j$ 有界，故这时格式(30)关于右端及初始条件绝对稳定.

要加上什么条件才能保证 $\|T\|\leqslant1$ 成立?

设 $A_i(i=1, 2, \cdots, m)$彼此均可交换，且有公共的基函数$\{u_n\}$. 即

$$A u_n=\lambda_n u_n,$$

$$A_i u_n=\lambda_n^{(i)} u_n,$$

其中 $\lambda_n=\sum\limits_{i=1}^m\lambda_n^{(i)}$. 则

$$T u_n=\left[1-\tau\prod_{i=1}^m\left(1+\frac{\tau\lambda_n^{(i)}}{2}\right)^{-1}\lambda_n\right]u_n$$

$$=\frac{\mu_n-\frac{\tau}{2}\lambda_n}{\mu_n+\frac{\tau}{2}\lambda_n}u_n,$$

其中 $\mu_n\geqslant1$，如果 $\lambda_n^{(i)}\geqslant0$ 的话. 而这时 T 的固有值即

$$T_n=\frac{\mu_n-\frac{\tau}{2}\lambda_n}{\mu_n+\frac{\tau}{2}\lambda_n},$$

故有 $|T_n|\leqslant1$，因此有 $\|T\|\leqslant1$.

二、预估校正格式

在 $m>2$ 时，预估校正格式变成:

$$\text{预估}\quad\begin{cases}\dfrac{\varphi^{j+\frac{1}{2m}}-\varphi^j}{\tau/2}+A_1\varphi^{j+\frac{1}{2m}}=f^j;\\[2ex]\dfrac{\varphi^{j+\frac{i}{2m}}-\varphi^{j+\frac{i-1}{2m}}}{\tau/2}+A_i\varphi^{j+\frac{i}{2m}}=0.\end{cases}$$

$(i=2, 3, \cdots, m.)$

校正
$$\frac{\varphi^{j+1}-\varphi^j}{\tau}+A\varphi^{j+\frac{1}{2}}=f^j,$$

其中
$$f^j=f(t_{j+\frac{1}{2}}).$$

它的计算程序为：

1. $\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)\varphi^{j+\frac{1}{2m}}=\varphi^j+\frac{\tau}{2}f^j,\ \varphi^0=g;$

2. $\left(I+\frac{\tau}{2}A_i\right)\varphi^{j+\frac{i}{2m}}=\varphi^{j+\frac{i-1}{2m}};$

$$(i=2, 3, \cdots, m.)$$

3. $\varphi^{j+1}=\varphi^j-\tau(A\varphi^{j+\frac{1}{2}}-f^j)$

$$(j=0, 1, 2, \cdots.)$$

预估校正格式等价于方程

$$\frac{\varphi^{j+1}-\varphi^j}{\tau}+A\prod_{i=m}^{1}\left(I+\frac{\tau}{2}A_i\right)^{-1}\left(\varphi^j+\frac{\tau}{2}f^j\right)=f^j,\ \varphi^0=g, \tag{32}$$

若
$$\frac{\tau}{2}\|A_i\|<1\ (i=1, 2, \cdots, m),$$

则有展式
$$\left(I+\frac{\tau}{2}A_i\right)^{-1}=\left[I-\frac{\tau}{2}A_i+\left(\frac{\tau}{2}\right)^2A_i^2-\cdots\right],$$

故有
$$A\prod_{i=m}^{1}\left(I+\frac{\tau}{2}A_i\right)^{-1}=A\left[I-\frac{\tau}{2}A+O(\tau^2)\right]$$
$$=A-\frac{\tau}{2}A^2+O(\tau^2),$$

以此式及 φ^{j+1} 与 φ^j 在 $t=t_{j+\frac{1}{2}}$ 处的 Taylor 展式代入(32)并顾及 φ 是(1)之解，则可证明预估校正格式具有二阶精度.

为了讨论格式的稳定性，我们从(32)解出 φ^{j+1} 得

$$\varphi^{j+1}=T\varphi^j+\frac{\tau}{2}(I+T)f^j, \tag{33}$$

其中转移算子

$$T=I-\tau A\prod_{i=m}^{1}\left(I+\frac{\tau}{2}A_i\right)^{-1}.$$

若 $A_i(i=1, 2, \cdots, m)$彼此均可交换，且有公共的固有函数系. 则预估校正格式的转移算子与稳定化格式的转移算子相同. 故也有 $\|T\|\leqslant 1$. 而

$$\left\|\frac{1}{2}(I+T)\right\|\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\|T\|\leqslant 1.$$

由(33)就得到

$$\|\varphi^{j+1}\|\leqslant\|T\|\|\varphi^j\|+\tau\left\|\frac{1}{2}(I+T)\right\|\|f^j\|\leqslant\|\varphi^j\|+\tau\|f^j\|.$$

若记 $\|f\|=\max\limits_j\|f^j\|$，则由此递推得到

$$\|\varphi^j\|\leqslant\|g\|+j\tau\|f\|.$$

故这时预估校正格式关于右端及初始条件绝对稳定.

综合上述，若 A_i 与 t 无关，又 $A_i\geqslant 0(i=1, 2, \cdots, m)$，且彼此均可交换，有共同的固有函数系. 则稳定化方法与预估校正法都绝对稳定，而且都具有二阶精度(关于 τ).

§5 按多重算子分量的分裂法

上一节讨论的方法都假定算子 A 是与时间 t 无关的. 现在讨论 $A=A(t)$的情形.

设 $A\geqslant 0$，又 $A=\sum\limits_{i=1}^{m}A_i$, $A_i\geqslant 0(i=1, 2, \cdots, m)$. 当$t\in[t_j, t_{j+1}]$时，我们用如下形式的算子逼近:

$$\Lambda_i^j=\Lambda_i(t_{j+\frac{1}{2}}) \text{ 或 } \Lambda_i^j=\frac{1}{2}[\Lambda(t_j)+\Lambda(t_{j+1})].$$

我们先讨论 $f=0$ 的情形. 考虑按算子分量分裂的格式:

$$\frac{\varphi^{j+\frac{i}{m}}-\varphi^{j+\frac{i-1}{m}}}{\tau}+\Lambda_i^j\frac{\varphi^{j+\frac{i}{m}}+\varphi^{j+\frac{i-1}{m}}}{2}=0,\ \varphi^0=g. \tag{34}$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m.\ )$$

$$(j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.\ )$$

消去中间变量后写显式

$$\varphi^{j+1}=\prod_{i=m}^{1}\left(I+\frac{\tau}{2}\Lambda_i^j\right)^{-1}\left(I-\frac{\tau}{2}\Lambda_i^j\right)\varphi^j. \tag{35}$$

应用 Kellogg 引理得

$$\|\varphi^{j+1}\|\leqslant\|\varphi^j\|\leqslant\cdots\leqslant\|g\|,$$

即格式(34)关于初始条件绝对稳定.

现在考察其逼近阶. 设

$$\frac{\tau}{2}\|\Lambda_i^j\|<1\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m),$$

则有展开式

$$\left(I+\frac{\tau}{2}\Lambda_i^j\right)^{-1}=I-\frac{\tau}{2}\Lambda_i^j+\left(\frac{\tau}{2}\Lambda_i^j\right)^2-\cdots,$$

故有

$$\left(I+\frac{\tau}{2}\Lambda_i^j\right)^{-1}\left(I-\frac{\tau}{2}\Lambda_i^j\right)=I-\tau\Lambda_i^j+\frac{\tau^2}{2}(\Lambda_i^j)^2+O(\tau^3),$$

从而有

$$\prod_{i=m}^{1}\left(I+\frac{\tau}{2}\Lambda_i^j\right)^{-1}\left(I-\frac{\tau}{2}\Lambda_i^j\right)$$

$$=I-\tau\Lambda^j+\frac{\tau^2}{2}\left[(\Lambda^j)^2+\sum_{k=2}^{m}\sum_{l=1}^{k-1}(\Lambda_k^j\Lambda_l^j-\Lambda_l^j\Lambda_k^j)\right]$$

$$+O(\tau^3).$$

若 $\Lambda_i^j(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$彼此均可交换, 则上式中的二重

和变为 0，从而有

$$\prod_{i=m}^{1}\left(I+\frac{\tau}{2}A_i^j\right)^{-1}\left(I-\frac{\tau}{2}A_i^j\right)=I-\tau A^j+\frac{\tau^2}{2}(A^j)^2+O(\tau^3),$$

以此式及 φ^{j+1} 与 φ^j 在 $t=t_{j+\frac{1}{2}}$ 处的 Taylor 展式代入(35)得

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^{j+\frac{1}{2}}+A^j\varphi^{j+\frac{1}{2}}+O(\tau^2)=0,$$

所以这时格式(34)为二阶逼近．但当 A_i^j 不可交换时，它只为一阶近似．

在一般情形，为了得到二阶逼近格式，我们引进如下按多重算子分量的二循环对称分裂格式：

$$\begin{cases}\dfrac{\varphi^{j+\frac{i}{m}-1}-\varphi^{j+\frac{i-1}{m}-1}}{\tau}+A_i^j\dfrac{\varphi^{j+\frac{i}{m}-1}+\varphi^{j+\frac{i-1}{m}-1}}{2}=0,\ \varphi^0=g\\ \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m);\\ \dfrac{\varphi^{j+1-\frac{i-1}{m}}-\varphi^{j+1-\frac{i}{m}}}{\tau}+A_i^j\dfrac{\varphi^{j+1-\frac{i-1}{m}}+\varphi^{j+1-\frac{i}{m}}}{2}=0.\\ \qquad (i=m,\ m-1,\ \cdots,\ 1.)\\ \qquad (j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.)\end{cases}\tag{36}$$

其中 $$A_i^j=A_i(t_j).$$

它们可以化成二个式子：

$$\varphi^j=\prod_{i=m}^{1}\left(I+\frac{\tau}{2}A_i^j\right)^{-1}\left(I-\frac{\tau}{2}A_i^j\right)\varphi^{j-1},\ \varphi^0=g,$$

$$\varphi^{j+1}=\prod_{i=1}^{m}\left(I+\frac{\tau}{2}A_i^j\right)^{-1}\left(I-\frac{\tau}{2}A_i^j\right)\varphi^j.$$

第一个式子计算 $t\in[t_{j-1},\ t_j]$，第二个式子计算 $t\in[t_j,\ t_{j+1}]$．若从中消去 φ^j，则得

$$\varphi^{j+1}=\prod_{i=1}^{m}\left(I+\frac{\tau}{2}\Lambda_i^j\right)^{-1}\left(I-\frac{\tau}{2}\Lambda_i^j\right)\prod_{i=m}^{1}\left(I+\frac{\tau}{2}\Lambda_i^j\right)^{-1}$$
$$\times\left(I-\frac{\tau}{2}\Lambda_i^j\right)\varphi^{j-1}. \tag{37}$$

利用 Kellogg 引理易知有

$$\|\varphi^{j+1}\|\leqslant\|\varphi^{j-1}\|\leqslant\|\varphi^{j-3}\|\leqslant\cdots\leqslant\|g\|.$$

所以二循环对称分裂格式绝对稳定.

若 $\qquad \frac{1}{2}\|\Lambda_i^j\|<1,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n_0,$

则可像前面那样证明有

$$\prod_{i=1}^{m}\left(I+\frac{\tau}{2}\Lambda_i^j\right)^{-1}\left(I-\frac{\tau}{2}\Lambda_i^j\right)\prod_{i=m}^{1}\left(I+\frac{\tau}{2}\Lambda_i^j\right)^{-1}$$
$$\times\left(I-\frac{\tau}{2}\Lambda_i^j\right)$$
$$=I-2\tau\Lambda^j+\frac{(2\tau)^2}{2}(\Lambda^j)^2+O(\tau^3).$$

将此式及 φ^{j+1}, φ^{j-1} 在 $t=t_j$ 处的 Taylor 展式代入(37)就可证明格式(36)给出二阶逼近.

当 $f\neq 0$ 时, 只要把(36)中第一组格式中的最后一个及第二组格式中的第一个式子分别代之以

$$\frac{\varphi^j-\varphi^{j-\frac{1}{m}}}{\tau}+\Lambda_m^j\frac{\varphi^j+\varphi^{j-\frac{1}{m}}}{2}=f^j+\frac{\tau}{2}\Lambda_m^jf^j,$$

$$\frac{\varphi^{j+\frac{1}{m}}-\varphi^j}{\tau}+\Lambda_m^j\frac{\varphi^{j+\frac{1}{m}}+\varphi^j}{2}=f^j-\frac{\tau}{2}\Lambda_m^jf^j,$$

其中 $f^j=f(t_j)$, 这就可以保证格式具有二阶精度, 而且绝对稳定. 它可以用下述计算程序来实现.

1. $\left(I+\frac{\tau}{2}\Lambda_i^j\right)\varphi^{j+\frac{i}{m}-1}=\left(I-\frac{\tau}{2}\Lambda_i^j\right)\varphi^{j+\frac{i-1}{m}-1},\ \varphi^0=g;$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1.\ )$$

2. $\left(I+\frac{\tau}{2}\Lambda_m^j\right)\varphi^j=\left(I-\frac{\tau}{2}\Lambda_m^j\right)\varphi^{j-\frac{1}{m}}+\tau\left(I+\frac{\tau}{2}\Lambda_i^j\right)f^j$;

3. $\left(I+\frac{\tau}{2}\Lambda_m^j\right)\varphi^{j+\frac{1}{m}}=\left(I-\frac{\tau}{2}\Lambda_m^j\right)(\varphi^j+\tau f^j)$;

4. $\left(I+\frac{\tau}{2}\Lambda_i^j\right)\varphi^{j+1-\frac{i-1}{m}}=\left(I-\frac{\tau}{2}\Lambda_i^j\right)\varphi^{j+1-\frac{i}{m}}$.

$$(i=m-1,\ m-2,\ \cdots,\ 1.)$$

$$(j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

也可化成下面更为方便的等价计算程序:

1. $\left(I+\frac{\tau}{2}\Lambda_i^j\right)\varphi^{j-\frac{m+1-i}{m+1}}=\left(I-\frac{\tau}{2}\Lambda_i^j\right)\varphi^{j-\frac{m+1-i+1}{m+1}}$,

$\varphi^0=g$;

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m.)$$

2. $\varphi^{j+\frac{1}{m+1}}=\varphi^{j-\frac{1}{m+1}}+2\tau f^j$;

3. $\left(I+\frac{\tau}{2}\Lambda_{m-i+2}^j\right)\varphi^{j+\frac{i}{m+1}}=\left(I-\frac{\tau}{2}\Lambda_{m-i+2}^j\right)\varphi^{j+\frac{i-1}{m+1}}$.

$$(i=2,\ 3,\ \cdots,\ m+1.)$$

$$(j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.)$$

对 $f=0$ 的情形, Дьяконов 曾提出下述有趣的二循环分裂算法:

$$\begin{cases} \dfrac{\varphi^{j+\frac{i}{2m}}-\varphi^{j+\frac{i-1}{2m}}}{\tau/2}+\Lambda_i^j\varphi^{j+\frac{i-1}{2m}}=0,\ \varphi^0=g; \\ \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m.) \\ \dfrac{\varphi^{j+\frac{i}{2m}}-\varphi^{j+\frac{i-1}{2m}}}{\tau/2}+\Lambda_{2m-i+1}^j\varphi^{j+\frac{i}{2m}}=0, \\ \qquad (i=m+1,\ m+2,\ \cdots,\ 2m.) \\ \qquad (j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.) \end{cases} \tag{38}$$

其中 $\Lambda^j=\Lambda(t_{j+\frac{1}{2}})$.

这个格式的特点是当$t\in[t_j, t_{j+\frac{1}{2}}]$时为显格式；当$t\in[t_{j+\frac{1}{2}}, t_{j+1}]$时为隐格式，而且它们都是按算子分量分裂的. 从(38)的第一式消去中间变量得前半步的显格式:

$$\varphi^{j+\frac{1}{2}}=\prod_{i=m}^{1}\left(I-\frac{\tau}{2}\Lambda_i^j\right)\varphi^j,\ \varphi^0=g;$$

从(38)的第二式得后半步隐格式:

$$\varphi^{j+1}=\prod_{i=1}^{m}\left(I+\frac{\tau}{2}\Lambda_i^j\right)^{-1}\varphi^{j+\frac{1}{2}}.$$

故整步过程的统一格式为

$$\varphi^{j+1}=\prod_{i=1}^{m}\left(I+\frac{\tau}{2}\Lambda_i^j\right)^{-1}\prod_{i=m}^{1}\left(I-\frac{\tau}{2}\Lambda_i^j\right)\varphi^j,\ \varphi^0=g. \quad (39)$$

$$(j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.\ )$$

若设 $$\frac{\tau}{2}\|\Lambda_i^j\|<1,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m,$$

利用展开式

$$\left(I+\frac{\tau}{2}\Lambda_i^j\right)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{\tau}{2}\Lambda_i^j\right)^k\ \left(\text{记}\left(-\frac{\tau}{2}\Lambda_i^j\right)^0=I\right)$$

及φ^{j+1}, φ^j在$t=t_{j+\frac{1}{2}}$处的 Taylor 展式代入(39) 即可验证格式(38)具有二阶精度(关于τ). 为了避免重复性的推导技巧，故此处从略了.

为了证明格式(38)的稳定性，设$\Lambda_i^j(i=1, 2, \cdots, m)$彼此可交换. 这时转移算子可化成我们已研究过的形式

$$T=\prod_{i=1}^{m}\left(I+\frac{\tau}{2}\Lambda_i^j\right)^{-1}\left(I-\frac{\tau}{2}\Lambda_i^j\right).$$

只要应用 Kellogg 引理于各因子，即知有$\|T\|\leqslant 1$. 由(39)即可推得格式(38)是绝对稳定的.

§6 按多重算子分量的分裂法(续)

现在，我们再研究一种最简单的按算子分量分裂的格式．我们设 A 与 t 无关．

先讨论 $f=0$ 的情形．我们用向后差分逼近 $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$，得格式

$$\frac{\varphi^{j+\frac{i}{m}}-\varphi^{j+\frac{i-1}{m}}}{\tau}+A_i\varphi^{j+\frac{i}{m}}=0,\ \varphi^0=g. \tag{40}$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m.\ )$$
$$(j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.\ )$$

这是按算子分量分裂的简单隐格式．其计算程序为:

$$(I+\tau A_i)\varphi^{j+\frac{i}{m}}=\varphi^{j+\frac{i-1}{m}},\ \varphi^0=g. \tag{41}$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m.\ )$$
$$(j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.\ )$$

为了研究其稳定性，我们用 $\varphi^{j+\frac{i}{m}}$ 与(41)作内积，得

$$(\varphi^{j+\frac{i}{m}}-\varphi^{j+\frac{i-1}{m}},\ \varphi^{j+\frac{i}{m}})=-\tau(A_i\varphi^{j+\frac{i}{m}},\ \varphi^{j+\frac{i}{m}}).$$

因 $A_i\geqslant0$，故 $(A_i\varphi^{j+\frac{i}{m}},\ \varphi^{j+\frac{i}{m}})\geqslant0$．由上式即得

$$(\varphi^{j+\frac{i}{m}}-\varphi^{j+\frac{i-1}{m}},\ \varphi^{j+\frac{i}{m}})\leqslant0,$$

即
$$(\varphi^{j+\frac{i}{m}},\ \varphi^{j+\frac{i}{m}})\leqslant(\varphi^{j+\frac{i-1}{m}},\ \varphi^{j+\frac{i}{m}}).$$

因为对任何实数有

$$ab\leqslant\frac{1}{2}(a^2+b^2),$$

故有

$$(\varphi^{j+\frac{i-1}{m}},\ \varphi^{j+\frac{i}{m}})\leqslant\frac{1}{2}[(\varphi^{j+\frac{i-1}{m}},\ \varphi^{j+\frac{i-1}{m}})+(\varphi^{j+\frac{i}{m}},\ \varphi^{j+\frac{i}{m}})],$$

由上两式推得

$$(\varphi^{j+\frac{i}{m}},\ \varphi^{j+\frac{i}{m}})\leqslant\frac{1}{2}(\varphi^{j+\frac{i-1}{m}},\ \varphi^{j+\frac{i-1}{m}})$$
$$+\frac{1}{2}(\varphi^{j+\frac{i}{m}},\ \varphi^{j+\frac{i}{m}}),$$

故有 $\|\varphi^{j+\frac{i}{m}}\|^2\leqslant\|\varphi^{j+\frac{i-1}{m}}\|^2,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m.$

因而 $\|\varphi^{j+1}\|\leqslant\|\varphi^{j}\|\leqslant\cdots\leqslant\|g\|.$

故格式(40)是绝对稳定的. 但要指出的是，格式(40)对原问题仅为一阶逼近(关于 τ).

当 $f\neq0$ 时，简单隐式分裂格式变成：

$$\frac{\varphi^{j+\frac{i}{m}}-\varphi^{j+\frac{i-1}{m}}}{\tau}+A_i\varphi^{j+\frac{i-1}{m}}=0,\ \varphi^0=g, \tag{42}$$
$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1.)$$
$$\frac{\varphi^{j+1}-\varphi^{j+\frac{m-1}{m}}}{\tau}+A_m\varphi^{j+1}=f^j,$$
$$(j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.)$$

其中 $f^j=f(t_{j+1})$ 或 $f^j=f(t_{j+\frac{1}{2}})$ 均可. 此格式仅具有一阶精度(关于 τ).

下面来考察其稳定性. 因为当 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$ 时，它与格式(40)相同，故仍有估计式：

$$\|\varphi^{j+\frac{i}{m}}\|\leqslant\|\varphi^{j+\frac{i-1}{m}}\|,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1. \tag{43}$$

我们只需重点考察 $i=m$ 时的情形. 由(42)的最末一个式子与φ^{j+1} 作内积，得

$$(\varphi^{j+1},\ \varphi^{j+1})=(\varphi^{j+1-\frac{1}{m}},\ \varphi^{j+1})+\tau(f^j,\ \varphi^{j+1})$$
$$-\tau(A_m\varphi^{j+1},\ \varphi^{j+1}).$$

因 $A_m>0$，故$(A_m\varphi^{j+1},\ \varphi^{j+1})\geqslant0$. 由上式知

$$(\varphi^{j+1},\ \varphi^{j+1})\leqslant(\varphi^{j+1-\frac{1}{m}},\ \varphi^{j+1})+\tau(f^j,\ \varphi^{j+1}). \tag{44}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式

$$|(\varphi^{j+1-\frac{1}{m}},\ \varphi^{j+1})|\leqslant\|\varphi^{j+1-\frac{1}{m}}\|\cdot\|\varphi^{j+1}\|;$$

$$|(f^j,\ \varphi^{j+1})|\leqslant\|f^j\|\cdot\|\varphi^{j+1}\|.$$

以此二式代入(44)即得

$$\|\varphi^{j+1}\|^2\leqslant\|\varphi^{j+1-\frac{1}{m}}\|\cdot\|\varphi^{j+1}\|+\tau\|f^j\|\cdot\|\varphi^{j+1}\|,$$

即

$$\|\varphi^{j+1}\|\leqslant\|\varphi^{j+1-\frac{1}{m}}\|+\tau\|f^j\|.$$

由此及(43)即得

$$\|\varphi^{j+1}\|\leqslant\|\varphi^j\|+\tau\|f^j\|.$$

若记 $\|f\|=\max\limits_j\|f^j\|$，则由上式递推得

$$\|\varphi^j\|\leqslant\|g\|+j\tau\|f\|.$$

因 $j\tau=t_j$ 有界．故格式(42)绝对稳定．

这个算法也可以推广到 $A=A(t)$ 的情形．这时可取

$$A^j=A(t_{j+\frac{1}{2}});\quad f^j=f(t_{j+\frac{1}{2}}).$$

或

$$A^j=A(t_{j+1});\quad f^j=f(t_{j+1}).$$

这一节和上一节我们讨论四种按算子分量的分裂格式．在 $A\geqslant0$，且 $A=A(t)$ 时，二循环对称分裂格式既绝对稳定，又具有二阶精度(关于 τ)． 我们给出了它的两种方便的计算程序．这个方法还可以很方便地推广到解拟线性问题上去．

我们考虑发展问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}+A(t,\ \varphi)\varphi=0, & \text{于 } \Omega\times[0,\ T] \text{ 内},\\ \varphi|_{t=0}=g, & \text{于 } \Omega \text{ 内}.\end{cases} \tag{45}$$

再加上适当的边界条件，其中算子 A 既依赖于 t，也依赖于未知解 φ．设它可分裂为若干较简单的算子

$$A(t, \varphi)=\sum_{i=1}^{m}A_i(t, \varphi),\ A_i(t, \varphi)\geqslant 0(i=1, 2, \cdots, m),$$

且它们充分光滑. 我们还假设解 φ 也是 t 的充分光滑的函数. 当 $t\in[t_{j-1}, t_{j+1}]$ 时采用分裂格式:

$$\begin{cases} \dfrac{\varphi^{j+\frac{i}{m}-1}-\varphi^{j+\frac{i-1}{m}-1}}{\tau}+A_i^j\dfrac{\varphi^{j+\frac{i}{m}-1}+\varphi^{j+\frac{i-1}{m}-1}}{2}=0, & \varphi^0=g \\ (i=1, 2, \cdots, m); \\ \dfrac{\varphi^{j-\frac{i-1}{m}+1}-\varphi^{j-\frac{i}{m}+1}}{\tau}+A_i^j\dfrac{\varphi^{j-\frac{i-1}{m}+1}+\varphi^{j-\frac{i}{m}+1}}{2}=0 \\ (i=m, m-1, \cdots, 1), \\ (j=0, 1, 2, \cdots). \end{cases}$$

其中
$$A^j=A(t_j, \tilde{\varphi}^j),$$
$$\tilde{\varphi}^j=\varphi^{j-1}+\tau A(t_{j-1}, \varphi^{j-1})\varphi^{j-1}.$$

上式可以看作是用显格式

$$\frac{\tilde{\varphi}^j-\varphi^{j-1}}{\tau}+A(t_{j-1}, \varphi^{j-1})\varphi^{j-1}=0$$

对 φ^j 进行预估, 预估值 $\tilde{\varphi}^j$ 代入 A^j 而使方程线性化. 这个格式可用类似于论证格式(36)的稳定性与逼近阶的方法来证明其绝对稳定性与二阶逼近度. 对非齐次的情况, 亦可用与那里相同的方式来处理. 这为水力学、气象学、海洋学以及其他领域里的非定常拟线性问题应用算子分量分裂法开辟了多种可能性.

第 3 章

非定常问题的算子分裂法(二)

为了具体应用上一章的理论与方法来解算实际问题，这一章将列举一些具体问题的具体算子分裂格式，以便加深对上一章内容的理解．这些具体格式包括大家熟悉的交替方向法(A. D. I.)与局部一维化方法等．我们企图用这些例子说明在应用算子分裂法时可能遇到的问题，如算子的离散化方法、边界条件的处理等．这一章里我们还将介绍解双曲型方程的算子分裂法．大家将会看到，当应用算子分裂法来解双曲型方程时，上一章提供的理论与方法仍然十分重要．

§1 解二维热传导问题的交替方向法(A. D. I.)

我们考虑二维热传导问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}, \quad 于 \quad \Omega\times[0,\ T]内, \\ \varphi|_{t=0}=g(x_1,\ x_2), \\ \varphi|_{\Gamma\times[0,T]}=\psi(x_1,\ x_2,\ t), \end{cases} \tag{1}$$

其中 $$\Omega=\{(x_1,\ x_2)\,|\,0<x_1,\ x_2<1\}.$$

由此可见，算子 $A=-\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)=-\Delta$. 以后我们总是将 A 按变量 x_1 与 x_2 的方向分裂：$A_1=-\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}$;

$A_2=-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$. 这样就满足前一章所要求的条件.

为了对(1)进行离散化,我们采用差分方法中习知的记号:

$$\varphi(lh,\ mh,\ j\tau)=\varphi_{l,m}^j=\varphi^j \quad (\text{有时写作 } \varphi_{lm}^j),$$

其中 h 为空间步长, τ 为时间步长.

$$\delta_{x_1}\varphi_{l,m}^j=\varphi_{l+\frac{1}{2},m}^j-\varphi_{l-\frac{1}{2},m}^j,$$

$$\delta_{x_2}\varphi_{l,m}^j=\varphi_{l,m+\frac{1}{2}}^j-\varphi_{l,m-\frac{1}{2}}^j \quad (\text{有时记 } \delta_{x_i}=\delta_i),$$

$$\delta_{x_1}^2\varphi_{l,m}^j=\varphi_{l+1,m}^j-2\varphi_{l,m}^j+\varphi_{l-1,m}^j,$$

$$\delta_{x_2}^2\varphi_{l,m}^j=\varphi_{l,m+1}^j-2\varphi_{l,m}^j+\varphi_{l,m-1}^j \quad (\text{有时记 } \delta_{x_i}^2=\delta_i^2).$$

我们考虑 Crank-Nicolson 格式

$$(\text{C-N}):\quad \left(1-\frac{r}{2}\delta_{x_1}^2\right)\left(1-\frac{r}{2}\delta_{x_2}^2\right)\varphi^{j+1}=\left(1+\frac{r}{2}\delta_{x_1}^2\right)\left(1+\frac{r}{2}\delta_{x_2}^2\right)\varphi^j+O(\tau^3+\tau h^2),$$

其中 $r=\tau/h^2$, $O(\tau^3+\tau h^2)$ 相当于逼近阶为 $O(\tau^2+h^2)$.

1963 年 Дьяконов 提出计算(C-N)格式的程序

$$(\text{D}_1):\quad \begin{cases}\left(1-\frac{r}{2}\delta_1^2\right)\varphi^{j+\frac{1}{2}}=\left(1+\frac{r}{2}\delta_1^2\right)\left(1+\frac{r}{2}\delta_2^2\right)\varphi^j,\\ \left(1-\frac{r}{2}\delta_2^2\right)\varphi^{j+1}=\varphi^{j+\frac{1}{2}}.\end{cases}$$

将(C-N)格式化为两步, 每步只需解一组三对角方程(相应于一个自变量 x_1 或 x_2 方向), 故计算一次交换一个方向, 所以称为隐式交替方向法.

1955 年 Peaceman 与 Rachford 引进下述算子分裂程序:

$$(\text{P}-\text{R}):\quad \begin{cases}\left(1-\frac{r}{2}\delta_1^2\right)\varphi^{j+\frac{1}{2}}=\left(1+\frac{r}{2}\delta_2^2\right)\varphi^j,\\ \left(1-\frac{r}{2}\delta_2^2\right)\varphi^{j+1}=\left(1+\frac{r}{2}\delta_1^2\right)\varphi^{j+\frac{1}{2}}.\end{cases}$$

这是最早的一个交替方向程序，称之为 Peaceman-Rachford 格式.

比(C-N)格式更精确的格式:

$$\left[1-\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{6}\right)\delta_1^2\right]\left[1-\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{6}\right)\delta_2^2\right]\varphi^{j+1}$$
$$=\left[1+\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{6}\right)\delta_1^2\right]\left[1+\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{6}\right)\delta_2^2\right]\varphi^{j}$$
$$+O(\tau^3+\tau h^4).$$

它关于 τ 仍为二阶逼近，但关于 h 是四阶的. 1964 年 Mitchell 与 Fairweather 提出下述计算程序(分裂格式):

(M-F):

$$\begin{cases}\left[1-\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{6}\right)\delta_1^2\right]\varphi^{j+\frac{1}{2}}=\left[1+\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{6}\right)\delta_2^2\right]\varphi^{j},\\ \left[1-\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{6}\right)\delta_2^2\right]\varphi^{j+1}=\left[1+\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{6}\right)\delta_1^2\right]\varphi^{j+\frac{1}{2}}.\end{cases}$$

Дьяконов 提出一个与之等价的分裂格式:

$$(D_2):\quad\begin{cases}\left[1-\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{6}\right)\delta_1^2\right]\varphi^{j+\frac{1}{2}}\\ \quad=\left[1+\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{6}\right)\delta_1^2\right]\left[1+\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{6}\right)\delta_2^2\right]\varphi^{j},\\ \left[1-\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{6}\right)\delta_2^2\right]\varphi^{j+1}=\varphi^{j+\frac{1}{2}}.\end{cases}$$

1956 年 Douglas 与 Rachford 给出的交替方向格式:

$$(D\text{-}R):\quad\begin{cases}(1-r\delta_1^2)\varphi^{j+\frac{1}{2}}=(1+r\delta_2^2)\varphi^{j},\\ (1-r\delta_2^2)\varphi^{j+1}=\varphi^{j+\frac{1}{2}}-r\delta_2^2\varphi^{j}\end{cases}$$

的逼近阶为 $O(\tau+h^2)$. 消去中间变量 $\varphi^{j+\frac{1}{2}}$ 得

$$(1-r\delta_1^2)(1-r\delta_2^2)\varphi^{j+1}=(1+r^2\delta_1^2\delta_2^2)\varphi^{j},$$

它可以按 Дьяконов 的方式分裂为

$$(\mathrm{D}_3):\quad \begin{cases}(1-r\delta_1^2)\varphi^{j+\frac{1}{2}}=(1+r^2\delta_1^2\delta_2^2)\varphi^j,\\ (1-r\delta_2^2)\varphi^{j+1}=\varphi^{j+\frac{1}{2}}.\end{cases}$$

所有上述各种算子分裂法，都构成交替方向法，也就是说，它们都是按降维的方式分裂的，使原问题化成交替地解一串三对角方程组.

由于上述格式的中间值 $\varphi^{j+\frac{1}{2}}$ 不需要逼近解在任何时刻的值，也就是说，它不反应问题的物理性质，故其边界值只有通过解在 $t_j=j\tau$ 及 $t_{j+1}=(j+1)\tau$ 上的边界值 φ^j 与 φ^{j+1} 来求得.

下面给出各种格式求中间值 $\varphi^{j+1/2}$ 的边界值的公式，它们只用到 ψ^j 与 ψ^{j+1} 关于 x_2 的中心差分：

$$(\mathrm{D}_1):\quad \varphi^{j+\frac{1}{2}}=\left(1-\frac{r}{2}\delta_2^2\right)\psi_{lm}^{j+1}.$$

$$(\mathrm{P\text{-}R}):\quad \varphi^{j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{r}{2}\delta_2^2\right)\psi_{lm}^{j+1}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{r}{2}\delta_2^2\right)\psi_{lm}^{j}.$$

$$(\mathrm{M\text{-}F}):\quad \varphi^{j+\frac{1}{2}}=\frac{r-1/6}{2r}\left[1-\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{6}\right)\delta_2^2\right]\psi_{lm}^{j+1}+\frac{r+1/6}{2r}\left[1+\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{6}\right)\delta_2^2\right]\psi_{lm}^{j}.$$

$$(\mathrm{D}_2):\quad \varphi^{j+\frac{1}{2}}=\left[1-\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{6}\right)\delta_2^2\right]\psi_{lm}^{j+1}.$$

$$(\mathrm{D\text{-}R}):\quad \varphi^{j+\frac{1}{2}}=(1-r\delta_2^2)\psi_{lm}^{j+1}+r^2\delta_2^2\psi_{lm}^{j}.$$

$$(\mathrm{D}_3):\quad \varphi^{j+\frac{1}{2}}=(1-r\delta_2^2)\psi_{lm}^{j+1}.$$

由此可见，Дьяконов 的三种分裂格式 (D_1)、(D_2) 与 (D_3) 在确定中间变量的边界条件时比其他格式要简单些.

当 ψ 与时间 t 无关时，即 $\psi(x_1, x_2, t)=\psi(x_1, x_2)$，则上述公式变成：

(D_1): $$\varphi^{j+\frac{1}{2}}=\left(1-\frac{r}{2}\delta_2^2\right)\psi_{lm}.$$

$(P\text{-}R)$: $$\varphi^{j+\frac{1}{2}}=\psi_{lm}.$$

$(M\text{-}F)$: $$\varphi^{j+\frac{1}{2}}=\left(1+\frac{1}{6}\delta_2^2\right)\psi_{lm}.$$

(D_2): $$\varphi^{j+\frac{1}{2}}=\left[1-\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{6}\right)\delta_2^2\right]\psi_{lm}.$$

$(D\text{-}R)$: $$\varphi^{j+\frac{1}{2}}=\psi_{lm}.$$

(D_3): $$\varphi^{j+\frac{1}{2}}=(1-r\delta_2^2)\psi_{lm}.$$

当 $\psi(x_1, x_2, t)=\text{const.}$ 时，则所有各式的中间变量的边值也取此常数为值.

我们来看两个例子.

例 1 $\quad \overline{\Omega}=\{(x_1, x_2)\,|\,0\leqslant x_1, x_2\leqslant 1\}$.

取 $h=1/4$，我们画出 $t=t_j$，$t_{j+\frac{1}{2}}$，t_{j+1} 各层的图形.

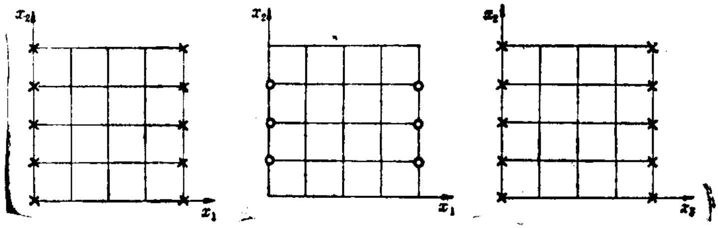


图 3.1

所有上述各 A. D. I. 格式的中间值 $\varphi^{j+\frac{1}{2}}$ 的边界值 $\psi^{j+\frac{1}{2}}$（我们在中间层 $t=t_{j+\frac{1}{2}}$ 以"○"标出）可以通过 $t=t_j$ 及 $t=t_{j+1}$ 层上的 φ^j 与 φ^{j+1} 的边界值 ψ^j 及 ψ^{j+1}（我们用"×"标出）来求得. 因此，当我们应用 A. D. I. 方法进行计算时，每一步都要

先算出中间层的边界值，然后才开始内点的计算.

例 2 $\overline{\Omega}$ 为 L 形区域:

$$\overline{\Omega}=\left\{(x_1,\ x_2)\,\Big|\,0\leqslant x_1,\ x_2\leqslant\frac{1}{2}\right\}$$
$$\cup\left\{(x_1,\ x_2)\,\Big|\,\frac{1}{2}\leqslant x_1\leqslant 1,\ 0\leqslant x_2\leqslant 1\right\}.$$

取 $h=1/6$，我们画出相应于时刻 $t=t_j,\ t_{j+\frac{1}{2}},\ t_{j+1}$ 各层的图形.

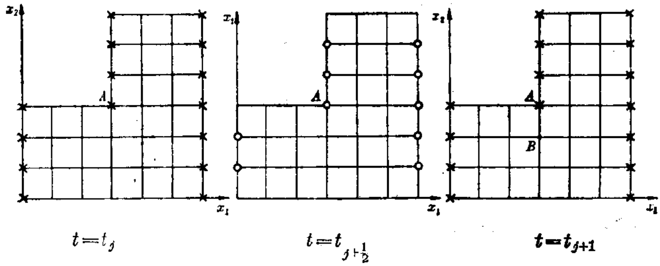


图 3.2

在中间层 $t=t_{j+\frac{1}{2}}$ 上 $\varphi^{j+\frac{1}{2}}$ 的边界值 $\psi^{j+\frac{1}{2}}$（我们用"○"标出）可以通过 φ^j 与 φ^{j+1} 在 $t=t_j$ 及 $t=t_{j+1}$ 层上的边界值 ψ^j 与 ψ^{j+1}（我们用"×"标出）计算出来. 但在图的角点 A 处，$\varphi^{j+\frac{1}{2}}$ 的边值却无法直接先计算，因为这时它还需要知道 φ^{j+1} 在 B 点的值. 不过 $\varphi^{j+\frac{1}{2}}$ 的值除了点 A 所在的水平线上的网内点外，其他各内点之值都能计算出来. 因而 φ^{j+1} 在 B 点之值也可以在 A 点的值之先计算出来. 有了 φ^{j+1} 在 B 点之值，则 $\varphi^{j+\frac{1}{2}}$ 在 A 点的边界值就可以计算出来了. 有了它就可以计算 $\varphi^{j+\frac{1}{2}}$ 在 A 点所在水平线上的内网点上的值了，因此接着就可计算出 $t=t_{j+1}$ 层上最右两列上的 φ^{j+1} 了.

由例 2 可见，对于由多个矩形区域(它们的边界都与坐标轴平行)组合而成的区域 Ω 也可用类似的方法处理.

对于按分量分裂法(也称为局部一维化方法 L. O. D.)，这时相当于"局部"解方程对：

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\varphi_\tau}{\partial t}=\dfrac{\partial^2\varphi_\tau}{\partial x_2^2}, & t_j<t\leqslant t_j+\dfrac{\tau}{2}, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\varphi_\tau}{\partial t}=\dfrac{\partial^2\varphi_\tau}{\partial x_1^2}, & t_j+\dfrac{\tau}{2}<t\leqslant t_{j+1}. \end{cases} \tag{2}$$

(关于这方面的理论我们将在下一章介绍.)

应用一维 Crank-Nicolson 格式于(2)，得到

$$\begin{cases} \left(1-\dfrac{r}{2}\delta_2^2\right)\varphi_\tau^{j+\frac{1}{2}}=\left(1+\dfrac{r}{2}\delta_2^2\right)\varphi_\tau^j, \\ \left(1-\dfrac{r}{2}\delta_1^2\right)\varphi_\tau^{j+1}=\left(1+\dfrac{r}{2}\delta_1^2\right)\varphi_\tau^{j+\frac{1}{2}}. \end{cases} \tag{3}$$

或用更高精度的格式逼近(2)：

$$\begin{cases} \left[1-\dfrac{1}{2}\left(r-\dfrac{1}{6}\right)\delta_2^2\right]\varphi_\tau^{j+\frac{1}{2}}=\left[1+\dfrac{1}{2}\left(r+\dfrac{1}{6}\right)\delta_2^2\right]\varphi_\tau^j, \\ \left[1-\dfrac{1}{2}\left(r-\dfrac{1}{6}\right)\delta_1^2\right]\varphi_\tau^{j+1}=\left[1+\dfrac{1}{2}\left(r+\dfrac{1}{6}\right)\delta_1^2\right]\varphi_\tau^{j+\frac{1}{2}}. \end{cases} \tag{4}$$

对于矩形区域，中间层的边界值可取为

$$\varphi^{j+\frac{1}{2}}=\psi^{j+\frac{1}{2}}.$$

格式(3)与格式(P-R)：

$$\begin{cases} \left(1-\dfrac{r}{2}\delta_1^2\right)\varphi^{j+\frac{1}{2}}=\left(1+\dfrac{r}{2}\delta_2^2\right)\varphi^j, \\ \left(1-\dfrac{r}{2}\delta_2^2\right)\varphi^{j+1}=\left(1+\dfrac{r}{2}\delta_1^2\right)\varphi^{j+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

比较即知仅左端的 δ_1^2 与 δ_2^2 的位置对调了一下. A. R. Gourlay 曾发现它们之间的一个有趣的关系：

$$\varphi_\tau^i=\left(1-\frac{r}{2}\delta_2^2\right)\varphi^i \quad (i=j,\ j+1).$$

如果我们用二循环对称分裂法解问题(1)，则有格式

$$
\begin{cases}
\left.\begin{aligned}
\left(1-\frac{r}{2}\delta_1^2\right)\varphi^{j-\frac{1}{2}}=\left(1+\frac{r}{2}\delta_1^2\right)\varphi^{j-1}, \\
\left(1-\frac{r}{2}\delta_2^2\right)\varphi^{j}=\left(1+\frac{r}{2}\delta_2^2\right)\varphi^{j-\frac{1}{2}},
\end{aligned}\right\} t\in(t_{j-1},\ t_j], \\
\left.\begin{aligned}
\left(1-\frac{r}{2}\delta_2^2\right)\varphi^{j+\frac{1}{2}}=\left(1+\frac{r}{2}\delta_2^2\right)\varphi^{j}, \\
\left(1-\frac{r}{2}\delta_1^2\right)\varphi^{j+1}=\left(1+\frac{r}{2}\delta_1^2\right)\varphi^{j+\frac{1}{2}},
\end{aligned}\right\} t\in(t_j,\ t_{j+1}].
\end{cases}
\tag{5}
$$

我们可采用边界条件

$$\varphi^{j-\frac{1}{2}}=\psi^{j-\frac{1}{2}};\quad \varphi^{j+\frac{1}{2}}=\psi^{j+\frac{1}{2}}.$$

这时格式(3)与格式(5)中差商 $-\delta_i^2/h^2$ 所对应的三对角矩阵

$$A_i>0,\quad i=1,\ 2.$$

如果问题(1)换成 Neumann 边界条件

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\psi.\qquad 于\ \Gamma\times[0,\ T]\ 上,$$

则将有

$$A_i\geqslant 0,\quad i=1,\ 2.$$

由于按算子分量分裂法(局部一维化格式)的边界条件比较容易处理，故推广到三维问题也最方便. 我们在下一节讨论三维问题时就不再特别提到了.

从上面的讨论看到，局部一维化格式也是一种交替方向法，但交替方向法并不都是局部一维化的，因为它们有的不是按算子分量分裂的.

§2 解三维热传导问题的交替方向法(A. D. I.)

我们考虑三维热传导问题：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}+\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2}, \qquad \text{于 } \Omega \times [0,\ T] \text{内}, \\
\varphi|_{t=0}=g(x_1,\ x_2,\ x_3), \\
\varphi|_{\Gamma \times [0,T]}=\psi(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t),
\end{cases} \tag{6}
$$

其中 $\qquad \overline{\Omega}=\{(x_1,\ x_2,\ x_3)\,|\,0\leqslant x_1,\ x_2,\ x_3 \leqslant 1\}$.

考虑下述格式

$$
\text{(D-R):} \quad \begin{cases}
(1-r\delta_1^2)\varphi^{j+\frac{1}{3}}=[1+r(\delta_2^2+\delta_3^2)]\varphi^j, \\
(1-r\delta_2^2)\varphi^{j+\frac{2}{3}}=\varphi^{j+\frac{1}{3}}-r\delta_2^2\varphi^j, \\
(1-r\delta_3^2)\varphi^{j+1}=\varphi^{j+\frac{2}{3}}-r\delta_3^2\varphi^j.
\end{cases}
$$

消去中间变量得

$$
\prod_{i=1}^{3}(1-r\delta_i^2)\varphi^{j+1}=\left[\prod_{i=1}^{3}(1-r\delta_i^2)+r\sum_{i=1}^{3}\delta_i^2\right]\varphi^j.
$$

Douglas 与 Rachford 提出中间层的边界条件为

$$
\varphi^{j+\frac{1}{3}}=\varphi^{j+\frac{2}{3}}=\psi^{j+1}.
$$

但格式应该采用下述中间层边界条件:

$$
\begin{cases}
\varphi^{j+\frac{1}{3}}=\psi^j+(1-r\delta_2^2)(1-r\delta_3^2)(\psi^{j+1}-\psi^j), \\
\varphi^{j+\frac{2}{3}}=\psi^j+(1-r\delta_3^2)(\psi^{j+1}-\psi^j)
\end{cases}
$$

才更合理.

1962 年 Douglas 提出格式:

$$
\text{(D):} \quad \begin{cases}
(1-\alpha\delta_1^2)\varphi^{j+\frac{1}{3}}=\left[\dfrac{\alpha}{\beta}(1+\beta\delta_1^2)+(\alpha+\beta)(\delta_2^2+\delta_3^2)\right]\varphi^j, \\
(1-\alpha\delta_2^2)\varphi^{j+\frac{2}{3}}=\varphi^{j+\frac{1}{3}}-\beta\delta_2^2\varphi^j, \\
(1-\alpha\delta_3^2)\varphi^{j+1}=\dfrac{\beta}{\alpha}\varphi^{j+\frac{2}{3}}-\dfrac{\beta^2}{\alpha}\delta_3^2\varphi^j
\end{cases}
$$

$\left(\text{通常可取 } \alpha=\beta=\dfrac{r}{2}\right)$. 消去中间变量得

$$\prod_{i=1}^{3}(1-\alpha\delta_i^2)\varphi^{j+1}=\left[\prod_{i=1}^{3}(1+\beta\delta_i^2)-(\alpha+\beta)\beta^2\prod_{i=1}^{3}\delta_i^2\right]\varphi^j.$$

Douglas 提出中间层边值条件

$$\varphi^{j+\frac{1}{3}}=\varphi^{j+\frac{2}{3}}=\psi^{j+1}.$$

但此格式的中间层上的边界值应取为

$$\begin{cases}\varphi^{j+\frac{1}{3}}=\dfrac{\beta}{\alpha}\psi^j+(1-\alpha\delta_2^2)(1-\alpha\delta_3^2)\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\psi^{j+1}-\dfrac{\beta}{\alpha}\psi^j\right),\\ \varphi^{j+\frac{2}{3}}=\dfrac{\beta}{\alpha}\psi^j+(1-\alpha\delta_3^2)\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\psi^{j+1}-\dfrac{\beta}{\alpha}\psi^j\right)\end{cases}$$

才合理. 只有在 ψ 与 t 无关, 且取 $\alpha=\beta=\dfrac{r}{2}$ 时, Douglas 的中间层边界条件才与上面的公式一致. 这时, 格式(D)的逼近误差为 $O(\tau^2+h^2)$. 当 $\alpha=\dfrac{1}{2}\left(r-\dfrac{1}{6}\right)$, $\beta=\dfrac{1}{2}\left(r+\dfrac{1}{6}\right)$时, 逼近误差为 $O(\tau^2+h^4)$, 在这种情形, 不管 ψ 是否与 t 有关, Douglas 原来处理中间层边界条件的方式都会降低格式(D)的精度, 而且当 $r\leqslant\dfrac{11}{12}$ 时格式才稳定.

Дьяконов 的算子分裂格式在三维的情况有形式

$$(\mathrm{D}_4):\quad\begin{cases}(1-\alpha\delta_1^2)\varphi^{j+\frac{1}{3}}=\prod_{i=1}^{3}(1+\beta\delta_i^2)\varphi^j,\\ (1-\alpha\delta_2^2)\varphi^{j+\frac{2}{3}}=\varphi^{j+\frac{1}{3}},\\ (1-\alpha\delta_3^2)\varphi^{j+1}=\varphi^{j+\frac{2}{3}}.\end{cases}$$

这时中间层的边界条件为

$$\begin{cases}\varphi^{j+\frac{1}{3}}=(1-\alpha\delta_2^2)(1-\alpha\delta_3^2)\psi^{j+1},\\ \varphi^{j+\frac{2}{3}}=(1-\alpha\delta_3^2)\psi^{j+1}.\end{cases}$$

按算子分量分裂法(L. O. D. 法)为

$$
\begin{cases}
(1-\alpha\delta_3^2)\varphi^{j+\frac{1}{3}}=(1+\beta\delta_3^2)\varphi^j,\\
(1-\alpha\delta_2^2)\varphi^{j+\frac{2}{3}}=(1+\beta\delta_2^2)\varphi^{j+\frac{1}{3}},\\
(1-\alpha\delta_1^2)\varphi^{j+1}=(1+\beta\delta_1^2)\psi^{j+\frac{2}{3}},
\end{cases}
\tag{7}
$$

其中 $\alpha=\beta=r/2$, 或取 $\alpha=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{6}\right)$; $\beta=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{6}\right)$, 这时精度更高.

格式(7)的中间层边界条件的形式非常简单:

$$
\begin{cases}
\varphi^{j+\frac{1}{3}}=\psi^{j+\frac{1}{3}},\\
\varphi^{j+\frac{2}{3}}=\psi^{j+\frac{2}{3}}.
\end{cases}
$$

当 $\alpha=\beta=\frac{r}{2}$ 时, 应用 Kellogg 引理容易证明格式(7)绝对稳定. 而且计算程序单一,使用十分方便.

当 Ω 为非正规区域时, 问题将更复杂些. 有关复杂区域的情形, 我们将在本书第二部分里讨论.

§3 一些数值例子

这一节里我们给出用稳定化方法、预估校正法和按算子分量分裂法计算的三个数值例子. 一个是二维热传导问题, 一个是三维的. 它们的精确解都是已知的. 其目的在于通过这些例子来加深对算子分裂的理解. 有了精确解作比较更容易看清这类问题在求数值解时误差的趋势, 从而看到一个绝对稳定的格式在实用中的优越性. 第三个例子是带有角奇异边界条件(不连续点)的问题,其精确解是未知的. 但是我们容易从问题的解的物理性质来判断其数值解是否合理(定性地判断). 所有的结果都只选择极少数有代表性的数据以表

列出.

例1 解二维热传导初边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}-\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\varphi=0, \ (x_1,\ x_2,\ t)\in\Omega\times[0,\ 0.55],\\ \varphi\big|_{t=0}=\sin\pi x_1\sin\pi x_2,\\ \varphi\big|_{\Gamma\times[0,0.55]}=0,\end{cases}$$

其中 $$\Omega=\{(x_1,\ x_2)\,|\,0<x_1,\ x_2<1\}.$$

这个问题的精确解为

$$\varphi(x_1,\ x_2,\ t)=e^{-2\pi^2 t}\sin\pi x_1\sin\pi x_2.$$

显然它是充分光滑的.

一、用稳定化方法求其数值解

我们取网格 $x_1=kh$, $x_2=lh$, $t=j\tau$, 空间网步 $h=\dfrac{1}{10}$, 时间步长 $\tau=0.005$. 这里算子的分裂方式及其逼近如下:

$$A=-\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right),$$

$$(A\varphi)_{kl}\doteq(4\varphi_{kl}-\varphi_{k+1,l}-\varphi_{k-1,l}-\varphi_{k,l+1}-\varphi_{k,l-1})/h^2;$$

$$A_1=-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2},$$

$$(A_1\varphi)_{kl}\doteq(2\varphi_{kl}-\varphi_{k+1,l}-\varphi_{k-1,l})/h^2;$$

$$A_2=-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2},$$

$$(A_2\varphi)_{kl}\doteq(2\varphi_{kl}-\varphi_{k,l+1}-\varphi_{k,l-1})/h^2.$$

我们计算得到的数值解之最大误差在 Ω 的中间, 即在点 $(0.5,\ 0.5,\ j\tau)$, $j=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$, 因此我们将这些点处的精确解 $\varphi(0.5,\ 0.5,\ j\tau)$ 的部分值与相应点处的近似解 $\varphi_h(0.5,\ 0.5,\ j\tau)$ 及其误差 $(\varphi-\varphi_h)$ 列于表 3.1.

表 3.1

t	$\varphi(0.5, 0.5, t)$	$\varphi_h(0.5, 0.5, t)$	$\varphi-\varphi_h$
0.05	0.3727	0.3757	−0.0030
0.10	0.1389	0.1411	−0.0022
0.15	0.0518	0.0530	−0.0012
0.20	0.0193	0.0199	−0.0006
0.25	0.0072	0.0075	−0.0003
0.30	0.0027	0.0028	−0.0001
0.35	0.0010	0.0011	−0.0001
0.40	0.0004	0.0004	−0.0000
0.45	0.0001	0.0001	−0.0000
0.50	0.0000	0.0000	−0.0000
0.55	0.0000	0.0000	0.0000

二、用预估校正法计算

我们仍用 $h=0.1$, $\tau=0.005$. 计算结果与表 1 相同. 正如我们在上一章里已指出过的，当算子 A 与 t 无关而 A_1 与 A_2 可交换时，预估校正法与稳定化方法在解齐次方程($f=0$)时是等价的.

计算结果表明计算格式的稳定性能良好. 误差主要是由空间步长($h=0.1$)而引起的.

三、用按算子分量分裂法(局部一维化方法)

计算也得到同样的结果. 由于 Ω 是正规的，且边界条件 $\varphi|_\Gamma=0$, 所以在计算中间层边界条件时三种方法均未产生任何麻烦.

例 2 三维热传导问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}-\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\varphi=0, & (x,t)\in\Omega\times[0,0.3],\\ \varphi|_{t=0}=\sin\pi x_1\sin\pi x_2\sin\pi x_3, \\ \varphi|_{\Gamma\times[0,0.3]}=0,\end{cases}$$

其中 $\bar{\Omega}=\{(x_1,\ x_2,\ x_3)\,|\,0\leqslant x_1,\ x_2,\ x_3\leqslant 1\}$.

问题的精确解

$$\varphi(x,\ t)=e^{-3\pi^2 t}\sin\pi x_1\sin\pi x_2\sin\pi x_3.$$

逼近与分裂方式同例1，而且空间与时间步长仍分别取为 $h=0.1$, $\tau=0.005$.

一、用稳定化方法计算，所得结果(取5位小数)列于表3.2. 最大误差在立方体的中心点(0.5, 0.5, 0.5).

表 3.2

t	$\varphi(0.5,\ 0.5,\ 0.5,\ t)$	$\varphi_h(0.5,\ 0.5,\ 0.5,\ t)$	$\varphi-\varphi_h$
0.1	0.05177	0.05305	−0.00127
0.2	0.00268	0.00281	−0.00013
0.3	0.00014	0.00015	−0.00001

二、按算子分量分裂法计算，所得结果列于表3.3.

表 3.3

t	$\varphi(0.5,\ 0.5,\ 0.5,\ t)$	$\varphi_h(0.5,\ 0.5,\ 0.5,\ t)$	$\varphi-\varphi_h$
0.1	0.05177	0.05301	−0.00124
0.2	0.00268	0.00281	−0.00013
0.3	0.00014	0.00015	−0.00001

例 3 解初边值问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}-\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\varphi=0, & \text{于 } \Omega\times[0,\ 1]\text{内}, \\
\varphi\big|_{t=0}=0, \\
\varphi\big|_{\Gamma\times[0,1]}=1,
\end{cases}
$$

其中 $$\overline{\Omega}=\{(x_1,\ x_2)\,|\,0\leqslant x_1,\ x_2\leqslant 2\}.$$

我们取 $h=0.1$, $\tau=0.05$, 用预估校正法进行计算. 我们将最初四步的解在点(0.1, 1), (0.5, 1)及(1, 1)上的值(取 4 位小数)列于表 3.4.

表 3.4

t	$\varphi_h(0.1,\ 1,\ t)$	$\varphi_h(0.5,\ 1,\ t)$	$\varphi_h(1,\ 1,\ t)$
0.05	−0.0728	0.9036	0.9842
0.10	0.3358	0.6950	0.[illegible]067
0.15	0.0218	0.5406	0.7563
0.20	0.1560	0.4296	0.5965

由表 4 可见, 在靠近边界处, 计算第一步就出现负值, 这是不合理的. 产生这一现象的原因是由于原始数据(当 $t=0$ 时)在边界线: $x_1=0$, $x_1=2$, $x_2=0$, $x_2=2$ 上解不连续(由 0 跳到 1), 且 $\tau/h^2(=5)$过大.

于是我们缩小时间步长: 先取 $\tau=0.005$, 计算十步, 然后再放大步长 $\tau=0.05$ 继续计算. 这样一来, 靠近边界处的负值便消失了. 计算结果见表 3.5.

我们放大空间步长 $h=2/10$, 仍取 $\tau=0.05$. 计算结果列于表 3.6. 结果未出现负值. 这时 $\dfrac{\tau}{h^2}=1\dfrac{1}{4}$.

表 3.5

t	$\varphi_h(0.1, 1, t)$	$\varphi_h(0.5, 1, t)$	$\varphi_h(1, 1, t)$
0.05	0.2476	0.8801	0.9912
0.10	0.1635	0.6965	0.9022
0.15	0.1241	0.5448	0.7502
0.20	0.0950	0.4260	0.5968

表 3.6

t	$\varphi_h(0.2, 1, t)$	$\varphi_h(0.6, 1, t)$	$\varphi_h(1, 1, t)$
0.05	0.3892	0.9340	0.9796
0.10	0.3318	0.7726	0.8932
0.15	0.2386	0.6113	0.7441
0.20	0.1874	0.4833	0.5917
0.25	0.1449	0.3781	0.4665
0.30	0.1135	0.2966	0.3661
0.35	0.0887	0.2320	0.2867
0.40	0.0694	0.1817	0.2245
0.45	0.0543	0.1422	0.1757
0.50	0.0425	0.1113	0.1376
0.55	0.0333	0.0871	0.1077
0.60	0.0260	0.0682	0.0843
0.65	0.0204	0.0534	0.0660
0.70	0.0160	0.0418	0.0516
0.75	0.0125	0.0327	0.0404
0.80	0.0098	0.0256	0.0316
0.85	0.0076	0.0200	0.0248
0.90	0.0060	0.0157	0.0194
0.95	0.0047	0.0123	0.0152
1.00	0.0037	0.0096	0.0119

§4 解双曲型方程的算子分裂法

算子分裂法已用于解双曲型偏微分方程. 我们将从薄膜振动问题的解法讲起. 这里存在着两种处理途径: 一种是先将原问题化成发展问题, 然后用上一章提供的方法进行分裂求解; 另一种是直接对波动方程作离散化分裂. 这一节介绍前一种方法. 下一节再介绍直接分裂方法.

考虑下述带有周期边界条件的薄膜振动问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\dfrac{\partial}{\partial x_1}a^2\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\dfrac{\partial}{\partial x_2}a^2\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} \text{ 于 } \Omega\times[0,T]\text{内}, \\ \varphi\big|_{t=0}=g_1(x_1,\ x_2), \\ \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{t=0}=g_2(x_1,\ x_2), \end{cases} \tag{8}$$

其中 $$\overline{\Omega}=\{(x_1,\ x_2)\,|\,0\leqslant x_1,\ x_2\leqslant 1\},$$

$a^2=a^2(x_1,\ x_2)$ 是扰动传播速度之平方, g_1 与 g_2 是给定的函数.

设周期解 $\varphi(x_1,\ x_2,\ t)$ 关于所有的变量都充分光滑.

我们打算把这个问题化成发展问题来处理. 为此将(8)改写成方程组:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-a\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}=0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}-a\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}=0, \quad \text{于 } \Omega\times[0,\ T]\text{内}, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}-\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}au+\dfrac{\partial}{\partial x_2}av\right)=0, \end{cases} \tag{9}$$

及初始条件 $$\begin{cases} u\big|_{t=0}=u^0(x_1,\ x_2), \\ v\big|_{t=0}=v^0(x_1,\ x_2), \\ \varphi\big|_{t=0}=g_1(x_1,\ x_2), \end{cases}$$

其中函数 u^0 与 v^0 的选取有某种程度的任意性，只要求它们满足关系式：

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(au^0)+\frac{\partial}{\partial x_2}(av^0)=g_2(x_1,\ x_2).$$

引进矩阵 A 及向量 Φ 如下：

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -a\dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & -a\dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ -\dfrac{\partial}{\partial x_1}a & -\dfrac{\partial}{\partial x_2}a & 0 \end{bmatrix},\quad \Phi=\begin{bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{bmatrix}.$$

这样一来，(9)可写成发展问题的形式：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}+A\Phi=0 \quad 于\ \Omega\times[0,\ T]内, \\ \Phi\big|_{t=0}=\begin{bmatrix} u^0 \\ v^0 \\ g_1 \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{10}$$

我们先考察对称算子 A 的性质．为此，考虑泛函

$$\begin{aligned}(A\phi,\ \phi)&=-\int_\Omega\Big[\frac{\partial}{\partial x_1}(au)\cdot\varphi+au\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\\&\qquad+\frac{\partial}{\partial x_2}(av)\cdot\varphi+av\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\Big]\mathrm{d}\Omega\\&=-\int_\Omega\Big[\frac{\partial}{\partial x_1}(au\varphi)+\frac{\partial}{\partial x_2}(av\varphi)\Big]\mathrm{d}\Omega\\&=-\int_\Gamma[au\varphi\cos(n,\ x_1)+av\varphi\cos(n,\ x_2)]\mathrm{d}\Gamma\\&=-\int_\Gamma a\varphi[u\cos(n,\ x_1)+v\cos(n,x_2)]\mathrm{d}\Gamma\\&=-\int_\Gamma a\varphi\boldsymbol{u}_n\mathrm{d}\Gamma,\end{aligned}$$

其中 u_n 表示向量 $\boldsymbol{u}=u\boldsymbol{i}+v\boldsymbol{j}$ 的与 Γ 直交的分量。由于 a 与 φ 的周期性(解之导数也具周期性)，u_n 在正方形 Ω 的关于中心对称的边界点上之值大小相等，符号相反，故上式里的曲线积分为 0，因而得到条件

$$(A\Phi,\ \Phi)=0. \tag{11}$$

当薄膜是固定在边界上时上式仍然成立。这时，即使 Ω 为任意区域，条件(11)也是成立的。这个条件保证了问题(10)的解之唯一性。若不然，设问题(10)有二解 Φ_1 与 Φ_2，则 $\Phi=\Phi_1-\Phi_2$ 满足齐次初、边值条件。将(10)式与 Φ 作内积并考虑到条件(11)，就得到

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}+A\Phi,\ \Phi\right)=\frac{d}{dt}(\Phi,\ \Phi)+(A\Phi,\ \Phi)=\frac{d}{dt}\|\Phi\|^2=0,$$

其中
$$\|\Phi\|=\left[\int_\Omega(u^2+v^2+\varphi^2)\mathrm{d}\,\Omega\right]^{1/2}.$$

若设 $u_0=v_0=g_1=0$，则解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\|\Phi\|^2=0,\\ \|\Phi\|_{t=0}=0.\end{cases}$$

就有
$$\|\Phi\|=0.$$

这就意味着总有 $\Phi_1=\Phi_2$，故解是唯一的。

现在讨论解问题(10)的算子分裂法。我们将算子 A 分裂为：

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & -a\dfrac{\partial}{\partial x_1}\\ 0 & 0 & 0\\ -\dfrac{\partial}{\partial x_1}a & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -a\dfrac{\partial}{\partial x_2}\\ 0 & -\dfrac{\partial}{\partial x_2}a & 0\end{bmatrix}$$
$$=A_1+A_2,$$

像前面那样可证

$$(A_1\Phi,\ \Phi)=0;\quad (A_2\Phi,\ \Phi)=0.$$

因此，问题(10)就可以采用我们在上一章讨论过的稳定化方法或预估校正法或按分量分裂法来求解. 值得指出的是，当我们解二维以上的高维波动方程时则用按分量分裂法最好，因为它对算子 A 在要求条件极少的情况下就可保证得到一个绝对稳定而又具有二阶精度的差分格式. 所以这里我们只讨论问题(10)的按算子分量分裂法:

$$\begin{cases} \dfrac{\Phi^{j+1/2}-\Phi^j}{\tau}+A_1\dfrac{\Phi^{j+\frac{1}{2}}+\Phi^j}{2}=0, \\ \dfrac{\Phi^{j+1}-\Phi^{j+\frac{1}{2}}}{\tau}+A_2\dfrac{\Phi^{j+1}+\Phi^{j+\frac{1}{2}}}{2}=0. \end{cases} \quad t_j\leqslant t\leqslant t_{j+1}, \tag{12}$$

回到数量形式即有

$$\begin{cases} \begin{cases} \dfrac{u^{j+\frac{1}{2}}-u^j}{\tau}=a\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\varphi^{j+\frac{1}{2}}+\varphi^j}{2}\right), \\ \dfrac{v^{j+\frac{1}{2}}-v^j}{\tau}=0, \\ \dfrac{\varphi^{j+\frac{1}{2}}-\varphi^j}{\tau}=\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(a\dfrac{u^{j+\frac{1}{2}}+u^j}{2}\right); \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{u^{j+1}-u^{j+\frac{1}{2}}}{\tau}=0, \\ \dfrac{v^{j+1}-v^{j+\frac{1}{2}}}{\tau}=a\dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\dfrac{\varphi^{j+1}+\varphi^{j+\frac{1}{2}}}{2}\right), \\ \dfrac{\varphi^{j+1}-\varphi^{j+\frac{1}{2}}}{\tau}=\dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(a\dfrac{v^{j+1}+v^{j+\frac{1}{2}}}{2}\right). \end{cases} \end{cases} \tag{13}$$

从上式中的第二、四两个等式得

$$\begin{cases} v^{j+\frac{1}{2}}=v^j, \\ u^{j+1}=u^{j+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

以此代入(13)的其他等式，则(13)就化成

$$\begin{cases} \begin{cases} \dfrac{u^{j+1}-u^j}{\tau}=a\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\varphi^{j+\frac{1}{2}}+\varphi^j}{2}\right), \\ \dfrac{\varphi^{j+\frac{1}{2}}-\varphi^j}{\tau}=\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(a\dfrac{u^{j+1}+u^j}{2}\right), \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{v^{j+1}-v^j}{\tau}=a\dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\dfrac{\varphi^{j+1}+\varphi^{j+\frac{1}{2}}}{2}\right), \\ \dfrac{\varphi^{j+1}-\varphi^{j+\frac{1}{2}}}{\tau}=\dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(a\dfrac{v^{j+1}+v^j}{2}\right). \end{cases} \end{cases} \tag{14}$$

这已是局部一维的形式了．前两式与后两式构成交替方向的格式．从(14)出发，我们将选取 u, v, φ 的关于空间变量的差分逼近以便得到二阶精度的绝对稳定格式，同时又保持 A_1 与 A_2 的差分逼近算子 Λ_1 与 Λ_2 满足条件

$$(\Lambda_i\Phi,\ \Phi)=0, \quad i=1,\ 2.$$

设 $h=\dfrac{1}{N}$ 为空间网步．我们用下面的离散格式来逼近(14)：

$$\begin{cases} \dfrac{u_{kl}^{j+1}-u_{kl}^j}{\tau}=\dfrac{a_{kl}}{h}\left[\left(\dfrac{\varphi^{j+\frac{1}{2}}+\varphi^j}{2}\right)_{kl}-\left(\dfrac{\varphi^{j+\frac{1}{2}}+\varphi^j}{2}\right)_{k-1,l}\right], \\ \dfrac{\varphi_{kl}^{j+\frac{1}{2}}-\varphi_{kl}^j}{\tau}=\dfrac{1}{h}\left[a_{k+1,l}\left(\dfrac{u^{j+1}+u^j}{2}\right)_{k+1,l}-a_{kl}\left(\dfrac{u^{j+1}+u^j}{2}\right)_{kl}\right], \\ \dfrac{v_{kl}^{j+1}-v_{kl}^j}{\tau}=\dfrac{a_{kl}}{h}\left[\left(\dfrac{\varphi^{j+1}+\varphi^{j+\frac{1}{2}}}{2}\right)_{kl}-\left(\dfrac{\varphi^{j+1}+\varphi^{j+\frac{1}{2}}}{2}\right)_{k,l-1}\right], \\ \dfrac{\varphi_{kl}^{j+1}-\varphi_{kl}^{j+\frac{1}{2}}}{\tau}=\dfrac{1}{h}\left[a_{k,l+1}\left(\dfrac{v^{j+1}+v^j}{2}\right)_{k,l+1}-a_{kl}\left(\dfrac{v^{j+1}+v^j}{2}\right)_{kl}\right], \end{cases} \tag{15}$$

$$k,\ l=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1,\ N=\frac{1}{h},\ \ j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

为确定起见，我们考虑边界条件：

$$\varphi\big|_{\Gamma\times[0,T]}=0.$$

在网域边界上有条件

$$\begin{cases}\varphi_{0,l}^{t}=\varphi_{N,l}^{t}=\varphi_{k,0}^{t}=\varphi_{k,N}^{t}=0,\\ l,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1,\end{cases}\tag{16}$$

其中 $\qquad t=t_j$ 或 $t=t_{j+\frac{1}{2}},\quad j=0,\ 1,\ \cdots.$

因 u^0 与 v^0 已知，故从(15)及(16)就可以计算出 u 与 v 在各时间层的边界条件。

若令

$$\begin{cases}\mu_{kl}=\dfrac{\tau}{2h}a_{kl},\\ \alpha_{kl}^{j}=\dfrac{1}{2}\left(\varphi_{kl}^{j+\frac{1}{2}}+\varphi_{kl}^{j}\right),\quad \beta_{kl}^{j}=\dfrac{1}{2}\left(\varphi_{kl}^{j+1}+\varphi_{kl}^{j+\frac{1}{2}}\right),\\ f_{k,l}^{j}=\mu_{kl}u_{kl}^{j}-\mu_{k+1,l}u_{k+1,l}^{j}-\varphi_{kl}^{j},\\ b_{kl}^{j}=\mu_{kl}v_{kl}^{j}-\mu_{k,l+1}v_{k,l+1}^{j}-\varphi_{kl}^{j+\frac{1}{2}}.\end{cases}\tag{17}$$

则由(15)的第一、三两式得

$$\begin{cases}u_{kl}^{j+1}=u_{kl}^{j}+2\mu_{kl}\left(\alpha_{k,l}^{j}-\alpha_{k-1,l}^{j}\right),\\ v_{kl}^{j+1}=v_{kl}^{j}+2\mu_{kl}\left(\beta_{kl}^{j}-\beta_{k,l-1}\right).\end{cases}\tag{18}$$

以此代入(15)的二、四两个式子，并顾及(17)即得

$$\begin{cases}\mu_{k+1,l}\alpha_{k+1,l}^{j}-\left(\mu_{k+1,l}^{2}+\mu_{k,l}^{2}+1\right)\alpha_{k,l}^{j}+\mu_{kl}^{2}\alpha_{k-1,l}^{j}=f_{kl}^{j}\\ \qquad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1),\\ \alpha_{0,l}^{j}=\alpha_{N,l}^{j}=0\quad (l=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1).\\ \mu_{k,l+1}\beta_{k,l+1}^{j}-\left(\mu_{k,l+1}^{2}+\mu_{k,l}+1\right)\beta_{k,l}^{j}+\mu_{k,l}^{2}\beta_{k,l+1}^{j}=b_{kl}^{j}\\ \qquad (l=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1),\\ \beta_{k,0}^{j}=\beta_{k,N}^{j}=0\quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1).\end{cases}\tag{19}$$

现在可以把上述算法的实施程序描述如下：

1．确定初始场：u_{kl}^0, v_{kl}^0 及 φ_{kl}^0,

其中 u_{kl}^0 与 v_{kl}^0 满足条件：

$$\begin{aligned}&a_{k+1,l}u_{k+1,l}^0-a_{k-1,l}u_{k-1,l}^0\\&\quad=2hg_1(kh,\ lh)-(a_{k,l+1}v_{k,l+1}^0-a_{k,l+1}v_{k,l-1}^0).\end{aligned}$$

所以 u_{kl}^0 与 v_{kl}^0 的确定带有一定的"任意性"；

2．由(17)计算出 f_{kl}^0, μ_{kl}, $\mu_{k+1,l}$;

3．由(19)第一式计算出 α_{kl}^0;

4．由(17)计算出 $\varphi_{kl}^{\frac{1}{2}}$, b_{kl}^0, μ_{kl}, $\mu_{k,l+1}$;

5．由(19)第二式计算出 β_{kl}^0;

6．由(18)计算出 u_{kl}^1, v_{kl}^1;

7．由(17)的 β_{kl}^0 的表达式利用 $\varphi_{kl}^{\frac{1}{2}}$ 计算出 φ_{kl}^1.

然后重复步骤2~7，体现对 j 循环.

上述程序除了第3步与第5步要求解三对角方程组外，其余各步都是显式.

这种算法易于推广到更复杂的双曲型方程上去，且通常导向二阶精度的绝对稳定格式.

当 $a(x_1,\ x_2)\equiv1$ 时，则 $\mu_{kl}\equiv\dfrac{\tau}{2h}(=r/2)$. 于是(19)就变成十分简单的形式：

$$\begin{cases}\dfrac{r}{2}\alpha_{k+1,l}^j-(1+r)\alpha_{k,l}^j+\dfrac{r}{2}\alpha_{k-1,l}^j=f_{k,l}^j,\\\qquad\alpha_{0,l}^j=\alpha_{N,l}^j=0,\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1;\\\dfrac{r}{2}\beta_{k,l+1}^j-(1+r)\beta_{k,l}^j+\dfrac{r}{2}\beta_{k,l-1}^j=b_{k,l}^j,\\\qquad\beta_{k,0}^j=\beta_{k,N}^j=0,\ l=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1,\\\qquad j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.\end{cases}\tag{20}$$

§5 解双曲型方程的算子分裂法(续)

上一节已经讨论了将原问题(8)化成发展问题(10)所导出的算子分裂法. 这一节将讨论对问题(8)直接离散化成三层($t=t_{j-1}$, t_j, t_{j+1})隐式差分格式后的算子分裂法.

为简单起见,我们仅就 $a(x_1, x_2)\equiv 1$ 的情形来讨论.

取网格 $x_1=kh$, $x_2=lh$, $t=j\tau$, 网格函数

$$\varphi(x_1, x_2, t)=\varphi(kh, lh, j\tau)=\varphi_{kl}^j=\varphi^j.$$

考虑如下形式的三层隐格式:

$$\begin{aligned}&[1+a(\delta_{x_1}^2+\delta_{x_2}^2)+d\delta_{x_1}^2\delta_{x_2}^2]\varphi_{kl}^{j+1}\\&\quad=[2-b(\delta_{x_1}^2+\delta_{x_2}^2)-e\delta_{x_1}^2\delta_{x_2}^2]\varphi_{kl}^j\\&\qquad-[1+c(\delta_{x_1}^2+\delta_{x_2}^2)+f\delta_{x_1}^2\delta_{x_2}^2]\varphi_{kl}^{j-1},\end{aligned}\tag{21}$$

其中 a, b, c, d, e, f 为待定系数. 它们的不同选择将导向不同性质的差分格式. 我们将选择这些参数, 使此格式既对(8)有较高的逼近度,又便于计算.

为了便于构造分裂算法, 首先我们取 $d=a^2$. 这时(21)变成分解因子的形式

$$\begin{aligned}&(1+a\delta_1^2)(1+a\delta_2^2)\varphi^{j+1}\\&\quad=[2-b(\delta_1^2+\delta_2^2)-e\delta_1^2\delta_2^2]\varphi^j\\&\qquad-[1+c(\delta_1^2+\delta_2^2)+f\delta_1^2\delta_2^2]\varphi^{j-1},\end{aligned}\tag{22}$$

其中 $\delta_{x_1}^2$, $\delta_{x_2}^2$, φ_{kl}^j 已分别简写成 δ_1^2, δ_2^2 与 φ^j 了.

若问题(8)之解 φ 充分光滑,我们就可以将出现在(22)中的 φ 在点(kh, lh, $j\tau$)处展开成 Taylor 级数,并利用方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2},\\[2ex]\dfrac{\partial^4\varphi}{\partial t^4}=\dfrac{\partial^4\varphi}{\partial x_1^4}+2\dfrac{\partial^4\varphi}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+\dfrac{\partial^4\varphi}{\partial x_2^4},\end{cases}\tag{23}$$

等等，展开式(包括 h^6 项)为

$$\delta_\tau^2\varphi^j=r^2C_2+\frac{1}{12}r^4C_4+\frac{1}{6}r^4D_4+\frac{1}{720}r^6C_6$$

$$+\frac{1}{240}r^6D_6,$$

$$(\delta_1^2+\delta_2^2)\varphi^{j\pm1}=C_2\pm rC_3+\frac{1}{2}\left(r^2+\frac{1}{6}\right)C_4$$

$$+r^2D_4\pm\frac{1}{6}r\left(r^2+\frac{1}{2}\right)C_5\pm\frac{1}{3}r^3D^5$$

$$+\left(\frac{1}{24}r^4+\frac{1}{24}r^3+\frac{1}{360}\right)C_6$$

$$+\frac{1}{8}r^2\left(r^2+\frac{1}{3}\right)D_6,$$

$$\delta_1^2\delta_2^2\varphi^{j\pm1}=D_4\pm rD_5+\frac{1}{2}\left(r^2+\frac{1}{180}\right)D_6,$$

$$(\delta_1^2+\delta_2^2)\varphi^j=C_2+\frac{1}{12}C_4+\frac{1}{360}C_6,$$

$$\delta_1^2\delta_2^2\varphi^j=D_4+\frac{1}{360}D_6,$$

其中

$$C_2=h^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}\right),$$

$$C_3=h^3\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}\right),$$

$$C_4=h^4\left(\frac{\partial^4\varphi}{\partial x_1^4}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial x_2^4}\right),$$

$$C_5=h^5\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^4\varphi}{\partial x_1^4}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial x_2^4}\right),$$

$$C_6=h^6\left(\frac{\partial^6\varphi}{\partial x_1^6}+\frac{\partial^6\varphi}{\partial x_2^6}\right),$$

$$D_4=h^4\frac{\partial^4\varphi}{\partial x_1^2\partial x_2^2},$$

$$D_5 = h^5 \frac{\partial^5 \varphi}{\partial t\, \partial x_1^2 \partial x_2^2},$$

$$D_6 = h^6 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}\right).$$

Lees(1962 年)建议取参数为

$$\begin{cases} a = c = -\eta r^2, \\ b = -(1-2\eta) r^2, \\ e = -2\eta^2 r^4, \\ f = \eta^2 r^4. \end{cases}$$

其中 η 为另一参数. 将 Taylor 展式代入(22), 有截断误差(主要部分):

$$-\left\{\left[\left(\eta - \frac{1}{12}\right) r^4 + \frac{1}{12} r^2\right] C_4 + 2\left(\eta - \frac{1}{12}\right) r^4 D_4\right\}.$$

若 φ 的四阶偏导数有界. 则这时格式在解类函数中有逼近度 $O(\tau^2 + h^4)$.

1965 年 Fairweather 与 Mitchell 取参数为

$$\begin{cases} a = c = \dfrac{1}{12}(1 - r^2), \\ b = -\dfrac{1}{6}(1 - 5r^2), \\ e = -\dfrac{1}{72}(1 + 10r^2 + r^4), \\ f = \dfrac{1}{144}(1 - r^2)^2. \end{cases}$$

这时主要截断误差为

$$-\frac{1}{180} r^2 \left[\left(r^4 - \frac{3}{4}\right) c_6 + \frac{7}{4}\left(r^4 - \frac{29}{21}\right) D_6\right].$$

若 φ 的六阶偏导数有界, 则这时格式在解类函数中有逼近度 $O(\tau^4 + h^6)$, 比 Lees 的格式提高了 2 阶.

Самарский 1964 年提出的格式为

$$\begin{cases} a=c=\frac{1}{12}(1-6r^2), \\ b=-\frac{1}{6}, \\ e=-\frac{1}{72}(1+36r^4), \\ f=\frac{1}{144}(1-6r^2)^2. \end{cases}$$

其逼近度为 $O(\tau^2+h^6)$，界乎前两种格式之间.

在考虑格式的逼近阶时，由于我们应用了(23)，也就是说，函数 φ 满足波动方程，只有在波动方程的解类中再加上充分光滑的条件，上述三种格式之截断误差才具有前述形式.

上面三种格式的共同特点是参数的选择都具条件

$$a=c, \quad b=-(2a+r^2), \quad f=a^2.$$

这就保证了三种格式具有相同的形式:

$$(1+a\delta_1^2)(1+a\delta_2^2)[\varphi^{j+1}-2\varphi^j+\varphi^{j-1}]$$
$$=[r^2(\delta_1^2+\delta_2^2)-(e+2a^2)\delta_1^2\delta_2^2]\varphi^j.$$

若记 $\beta=-\frac{1}{r^2}(e+2a^2)$，则上式变成

$$(1+a\delta_1^2)(1+a\delta_2^2)[\varphi^{j+1}-2\varphi^j+\varphi^{j-1}]$$
$$=r^2[(\delta_1^2+\delta_2^2)+\beta\delta_1^2\delta_2^2]\varphi^j. \tag{24}$$

Lees 格式: $\quad a=-\eta r^2, \quad \beta=0.$

Fairweather-Mitchell 格式:

$$a=\frac{1}{12}(1-r^2), \quad \beta=1/6.$$

Самарский 格式:

$$a=\frac{1}{12}(1-6r^2), \quad \beta=1/6.$$

由此可见，其中以 Lees 格式形式最简单.

下面讨论其分裂算法. 我们从(24)出发. 一个最显然，但从计算的观点来看却不经济的分裂算法是 Дьяконов 提出的:

$$\begin{cases}(1+a\delta_1^2)\varphi^{j+\frac{1}{2}}=r^2[\delta_1^2+\delta_2^2+\beta\delta_1^2\delta_2^2]\varphi^j \\ \qquad\qquad +(1+a\delta_1^2)(1+a\delta_2^2)(2\varphi^j-\varphi^{j-1}), \\ (1+a\delta_2^2)\varphi^{j+1}=\varphi^{j+\frac{1}{2}}.\end{cases}$$

这个算法在每一网点需计算 $\delta_1^2\varphi$, $\delta_2^2\varphi$ 及 $\delta_1^2\delta_2^2\varphi$.

Lees 提出一个较经济的分裂算法:

$$\begin{cases}(1+a\delta_1^2)\varphi^{j+\frac{1}{2}}=r^2\left(\delta_1^2+\delta_2^2-\dfrac{\beta}{\alpha}\delta_2^2\right)\varphi^j, \\ (1+a\delta_2^2)(\varphi^{j+1}-2\varphi^j+\varphi^{j-1})=\varphi^{j+\frac{1}{2}}+r^2\dfrac{\beta}{\alpha}\delta_2^2\varphi^j.\end{cases} \tag{25}$$

这只要将第二式左乘$(1+a\delta_1^2)$，然后利用第一式消去$\varphi^{j+\frac{1}{2}}$，就知它是与(24)等价的.

从(24)出发，还容易提出其他的分裂算法. 下面看一个数值例子.

例 计算下述问题的数值解:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}, \quad (x,\ t)\in\Omega\times[0,\ 3]; \\ \left.\begin{aligned} & u|_{t=0}=\sin\pi x_1\sin\pi x_2, \\ & \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\end{aligned}\right\} \quad x\in\Omega=\{(x_1,x_2)\,|\,0<x_1,x_2<1\}; \\ u|_{\Gamma\times[0,3]}=0, \quad \Gamma \text{ 为 } \Omega \text{ 的边界}.\end{cases}$$

取 $h=1/11$(即每一时间层含 100 个内点)，$\tau=0.06$，即 $r=0.66$. 采用 Lees 格式按分裂算法(25)进行计算. 参数 η 分别取为 1/4, 1/2 与 1. 由于问题的精确解为

$$\varphi(x_1, x_2, t)=\sin\pi x_1\sin\pi x_2\cos 2\pi t.$$

现将最靠近单位正方形中心点处近似解的误差每隔五步的值列如表 3.7. 计算起步时之值 φ^0, φ^1 是由精确解给出的.

表 3.7

t \ η	1/4	1/2	1
0.3	−0.009353	−0.018065	−0.034928
0.6	−0.010148	−0.020010	−0.040224
0.9	0.025128	0.047913	0.090206
1.2	0.037914	0.074418	0.148135
1.5	−0.019930	−0.035643	−0.057948
1.8	−0.069506	−0.134848	−0.261908
2.1	−0.011155	−0.027693	−0.076422
2.4	0.087278	0.165541	0.306223
2.7	0.062022	0.128138	0.276733
3.0	−0.076253	−0.137287	−0.224734

为了研究格式的稳定性. 我们作些一般性的分析. 现在考虑问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+A\varphi=f, & \text{于 } \Omega\times[0, T], \\ \begin{cases} \varphi\big|_{t=0}=g_1, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{t=0}=g_2. \end{cases} & \text{于 } \Omega \text{ 内.} \end{cases} \tag{26}$$

设算子 A 与 t 无关, 且问题的解充分光滑. 设 A 正定, 即

$$(A\varphi, \varphi)\geqslant r^2(\varphi, \varphi).$$

考虑(26)的差分逼近:

$$\begin{cases}\dfrac{\varphi^{j+1}-2\varphi^j+\varphi^{j-1}}{\tau^2}+A\,\dfrac{\varphi^{j+1}+\varphi^{j-1}}{2}=f^j,\\ \varphi^0=g_1,\\ \varphi^1=\left(I-\dfrac{\tau^2}{2}A\right)g_1+\tau g_2+\dfrac{\tau^2}{2}f^0.\end{cases}$$

其中 φ^j 是空间变量的函数. 若 A 表示离散化后的矩阵算子, 则 φ^j 表示向量. 应用谱分析方法可以证明上述格式绝对稳定.

我们的目的在于研究(26)的分裂算法. 为此设

$$A=\sum_{i=1}^m A_i,\quad A_i\geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m.$$

我们采用下述差分逼近:

$$\prod_{i=1}^m\left(I+\frac{\tau^2}{2}A_i\right)\frac{\varphi^{j+1}-2\varphi^j+\varphi^{j-1}}{\tau}+A\varphi^j=f^j. \tag{27}$$

它以二阶精度(关于 τ)逼近(26). 其稳定性条件为

$$\tau\leqslant 2/\beta,$$

其中 β 为算子 $\prod\limits_{i=m}^{1}\left(I+\dfrac{\tau^2}{2}A_i\right)^{-1}A$ 的按模最大的固有值. 由此可见, 对于双曲型方程的三层($t=t_{j-1},\ t_j,\ t_{j+1}$)分裂算法只是条件稳定的.

(27)的分裂算法为:

1. $\varphi^0=g_1,\ \varphi^1=\left(I-\dfrac{\tau^2}{2}A\right)g_1+\tau g_2+\dfrac{\tau^2}{2}f^0;$

2. $\left(I+\dfrac{\tau^2}{2}A_1\right)\xi^{j+\frac{1}{m}}=-A\varphi^j+f^j;$

3. $\left(I+\dfrac{\tau^2}{2}A_i\right)\xi^{j+\frac{i}{m}}=\xi^{j+\frac{i-1}{m}},\ i=2,\ 3,\ \cdots,\ m;$

4. $\varphi^{j+1}=2\varphi^j-\varphi^{j-1}+\tau^2\xi^{j+1};$

重复2, 3, 4步骤($j=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$).

第 4 章

非定常问题的算子分裂法(三)

按算子分量的分裂法是作为构造经济差分格式的一种方法而加以研究的. Г. В. Демидов, Н. Н. Яненко, А. А. Самарский 等曾研究过具有复杂结构的微分方程用具有较简单结构的方程集进行弱逼近的问题. Яненко-Демидов 定理给出了弱逼近方法的收敛准则. 我们认为这方面的理论对研究算子分裂法有着重要的意义, 而且定理论证方法是初等的. 所以在本章加以介绍.

基于弱逼近理论, 接着将介绍解发展问题的弱逼近-Галеркин 方法, 其中包括一些十分有用的格式, 它们都是绝对稳定的.

§1 弱逼近的一些例子

为了使问题的提出有一定的背影, 我们将从一些最简单的例子开始.

例 1 考虑常微分方程的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=f(t)\equiv 1,\ t\in[0,\ T];\\ \varphi|_{t=0}=0.\end{cases}$$

在区间 $[t_j,\ t_{j+1}]$ 里, 其中 $t_j=j\tau$. 考察方程

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_\tau}{\mathrm{d}t}=f(\tau,\ t),\ t\in[t_j,\ t_{j+1}],$$

其中 $$f(\tau, t)=\begin{cases}2, & j\tau<t\leqslant\left(j+\frac{1}{2}\right)\tau;\\ 0, & \left(j+\frac{1}{2}\right)\tau<t\leqslant(j+1)\tau.\end{cases}$$

若 $j=0, 1, 2, \cdots, K=\frac{T}{\tau}$，则它被开拓到整个区间 $[0, T]$ 上了．原来的问题可用问题

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}\varphi_\tau}{\mathrm{d}t}=f(\tau, t), & t\in[0, T];\\ \varphi_\tau|_{t=0}=0\end{cases}$$

来逼近．$\varphi_\tau(t)$ 为近似问题的解．

容易看出，原问题的解为

$$\varphi(t)=t,$$

而近似问题的解为

$$\varphi_\tau(t)=\begin{cases}2t-t_j, & j\tau<t\leqslant\left(j+\frac{1}{2}\right)\tau;\\ t_j, & \left(j+\frac{1}{2}\right)\tau<t\leqslant(1+j)\tau.\end{cases}$$

因为对任意的 $t', t''\in[0, T]$，有

$$\lim_{\tau\to0}\int_{t'}^{t''}[f(\tau, t)-f(t)]\mathrm{d}t=0.$$

这表明函数 $f(\tau, t)$ 是弱逼近于 $f(t)$ 的（见图 4.1）．

$$|\varphi(t)-\varphi_\tau(t)|=|t-j\tau|\leqslant\tau, \quad \text{当 } t\in[t_j, t_{j+1}].$$

故当 $j=0, 1, \cdots, K$，均有

$$\lim_{\tau\to0}|\varphi(t)-\varphi_\tau(t)|=0,$$

即近似方程的解 $\varphi_\tau(t)$ 强收敛到原问题的解 $\varphi(t)$（见图 4.2）．

例 2 运输方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}=0, \quad t>0, \quad -\infty<x_i<+\infty;\\ \varphi|_{t=0}=g(x_1, x_2).\end{cases}$$

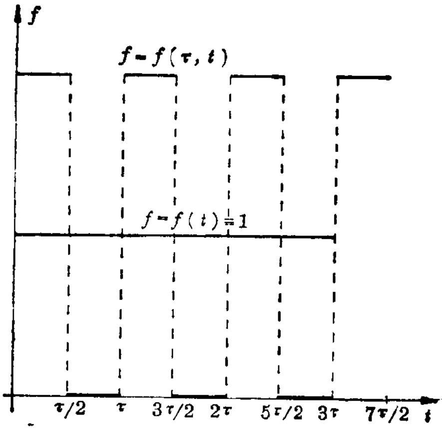


图 4.1

函数 $f(t)$ 与 $f(\tau, t)$ 的图象

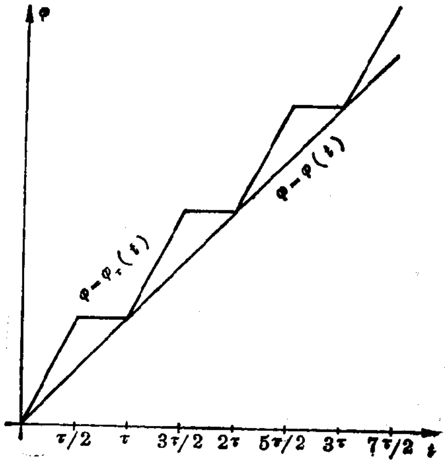


图 4.2

积分曲线 $\varphi(t)$ 与 $\varphi_\tau(t)$ 的图象

这个问题的解是

$$\varphi(x_1, x_2, t)=g(x_1-t, x_2-t)$$
$$=T_{-1}(t)T_{-2}(t)g(x_1, x_2).$$

其中 $T_{-1}(t)$ 与 $T_{-2}(t)$ 是位移算子，其定义如下：对二元函数 $f(x_1, x_2)$ 有

$$T_{-1}(t)f(x_1, x_2)=f(x_1-t, x_2);$$
$$T_{-2}(t)f(x_1, x_2)=f(x_1, x_2-t).$$

我们用方程

$$\frac{\partial\varphi_\tau}{\partial t}+f_\tau^1(t)\frac{\partial\varphi_\tau}{\partial x_1}+f_\tau^2(t)\frac{\partial\varphi_\tau}{\partial x_2}=0$$

来逼近原方程，其中

$$f_\tau^1(t)=\begin{cases}2\\0,\end{cases}\quad f_\tau^2(t)=\begin{cases}0 & j\tau<t\leqslant\left(j+\frac{1}{2}\right)\tau\\2 & \left(j+\frac{1}{2}\right)\tau<t\leqslant(j+1)\tau,\end{cases}$$

$$j=0, 1, 2, \cdots.$$

这种逼近，实际上是将原问题局部一维化了．也就是说，它将原问题分裂成一系列较简单的问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi_\tau}{\partial t}+2\dfrac{\partial\varphi_\tau}{\partial x_1}=0, & j\tau<t\leqslant\left(j+\frac{1}{2}\right)\tau;\\ \dfrac{\partial\varphi_\tau}{\partial t}+2\dfrac{\partial\varphi_\tau}{\partial x_2}=0, & \left(j+\frac{1}{2}\right)\tau<t\leqslant(j+1)\tau,\\ & j=0, 1, 2, \cdots;\\ \varphi_\tau(0)=g(x_1, x_2).\end{cases}$$

分裂问题的第一个方程的转移算子为

$$S_1\left(t+\frac{\tau}{2}, t\right)=S_1\left(\frac{\tau}{2}\right)=T_{-1}(\tau);$$

第二个方程的转移算子为

$$S_2\left(t+\frac{\tau}{2},\ t\right)=S_2\left(\frac{\tau}{2}\right)=T_{-2}(\tau).$$

因此，相继两次转移的结果为

$$S_\tau(t+\tau,\ t)=S_\tau(\tau)=S_2\left(\frac{\tau}{2}\right)S_1\left(\frac{\tau}{2}\right)$$
$$=T_{-2}(\tau)T_{-1}(\tau).$$

即近似问题的解算子强逼近原问题的解算子，且它们在节点 $t_j=j\tau$ 上重合. 虽然近似问题的系数 $f_\tau^1(t)$ 与 $f_\tau^2(t)$ 仅弱逼近原问题的系数.

例 3 热传导方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}, & t>0,\ -\infty<x_i<+\infty,\\ \varphi|_{t=0}=g(x_1,\ x_2).\end{cases}$$

我们用下面的问题来逼近它，

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi_\tau}{\partial t}=f_\tau^1(t)\dfrac{\partial^2\varphi_\tau}{\partial x_1^2}+f_\tau^2(t)\dfrac{\partial^2\varphi_\tau}{\partial x_2^2}, & t>0,\ -\infty<x_i<+\infty;\\ \varphi_\tau|_{t=0}=g(x_1,\ x_2).\end{cases}$$

其中 $f_\tau^i(t)\ (i=1,\ 2)$ 的定义同例 2. 这实际上就把原问题局部一维化了. 即在小时段 $[t_j,\ t_{j+1}]$ 上它变成了方程:

$$\frac{\partial\varphi_\tau}{\partial t}=2\frac{\partial^2\varphi_\tau}{\partial x_1^2},\quad j\tau<t\leqslant\left(j+\frac{1}{2}\right)\tau,\ -\infty<x_i<+\infty;$$

$$\frac{\partial\varphi_\tau}{\partial t}=2\frac{\partial^2\varphi_\tau}{\partial x_2^2},\quad \left(j+\frac{1}{2}\right)\tau<t\leqslant(j+1)\tau,\ -\infty<x_i<+\infty,$$

当 $j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ 时，问题就化成了一序列一维问题.

原问题的解为

$$\varphi(x_1,\ x_2,\ t)$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}G(x_1,\ x_2;\ \xi_1,\ \xi_2,\ t)\,g(\xi_1,\ \xi_2)\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2,$$

其中 G 是源函数:

$$G(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2, t)=G_1(x_1, \xi_1, t)G_2(x_2, \xi_2, t),$$

$$G_i(x_i, \xi_i, t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{(x_i-\xi_i)^2}{4t}\right), i=1, 2.$$

故从 t_j 到 t_{j+1} 有

$$\varphi(x_1, x_2, t_{j+1}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}G(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2, \tau)\varphi(\xi_1, \xi_2, t_j)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2.$$

而近似问题从 t_j 到 t_{j+1} 则分两步：从 t_j 到 $t_{j+\frac{1}{2}}$，再从 $t_{j+\frac{1}{2}}$ 到 t_{j+1}. 计算公式如下：

$$\varphi_\tau(x_1, x_2, t_{j+\frac{1}{2}}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{2\pi(t_{j+\frac{1}{2}}-t_j)}}\exp\left[-\frac{(x_1-\xi_1)^2}{8(t_{j+\frac{1}{2}}-t_j)}\right] \cdot\varphi_\tau(\xi_1, x_2, t_j)\mathrm{d}\xi_1$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}G_1(x_1, \xi_1, \tau)\varphi_\tau(\xi_1, x_2, t_j)\mathrm{d}\xi_1;$$

$$\varphi_\tau(x_1, x_2, t_{j+1}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{2\pi(t_{j+1}-t_{j+\frac{1}{2}})}}\exp\left[\frac{(x_2-\xi_2)^2}{8(t_{j+1}-t_{j+\frac{1}{2}})}\right] \cdot\varphi_\tau(x_1, \xi_2, t_{j+\frac{1}{2}})\mathrm{d}\xi_2$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}G_2(x_2, \xi_2, \tau)\varphi_\tau(x_1, \xi_2, t_{j+\frac{1}{2}})\mathrm{d}\xi_2$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}G_2(x_2, \xi_2, \tau)G_1(x_1, \xi_1, \tau) \cdot\varphi_\tau(\xi_1, \xi_2, t_j)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2.$$

当 $j=0$ 时，

$$\varphi_\tau(x_1, x_2, 0)=g(x_1, x_2)=\varphi(x_1, x_2, 0).$$

故由计算公式知

$$\varphi_\tau(x_1,\ x_2,\ t_1)=\varphi(x_1,\ x_2,\ t_1),$$

当 $j=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 时，有

$$\varphi_\tau(x_1,\ x_2,\ t_{j+1})=\varphi(x_1,\ x_2,\ t_{j+1}).$$

即在节点 $\{t_j\}$ 上近似方程的解与原问题的解重合. 容易看出，近似方程的系数只是弱逼近原方程的系数，而近似解却强收敛于原问题的解.

从上面三个例子看出，当我们以某种特殊的弱逼近于原问题的系数与右端的函数来取代原问题的系数与右端的已知函数时，这样得到的近似问题当参数 $\tau\to 0$ 时，其解强收敛到原问题的解，而这种近似问题实际上是局部简化了的一组问题，它实现了算子的分裂而使得在局部范围 $[t_j,\ t_{j+1}]$ 内问题易于求解. 这种性质是否具有一般性呢？Яненко 等建立的关于微分方程组的弱逼近理论给出了肯定的回答. 下面就来讨论这方面的问题.

§2 微分方程的弱逼近与算子分裂法

为了描述微分方程的弱逼近，我们先从函数的弱逼近定义开始.

定义 1 我们称函数集合 $f_\tau(x,t)$ 关于 t 在区间 $[0,T]$ 内弱逼近函数 $f(x,\ t)$，如果有

$$\int_{t_1}^{t_2}[f_\tau(x,\ s)-f(x,\ s)]\mathrm{d}s=\delta(x,\ t_1,\ t_2,\ \tau),$$

当 $\tau\to 0$ 时，对任何 $t_1,\ t_2\in[0,\ T]$ 均有

$$\|\delta\|\to 0.$$

定义 2 我们称线性微分算子集合 $A_\tau(t)$ 关于 t 在区间 $[0,\ T]$ 内弱逼近算子 $A(t)$，如果它对 $A(t)$ 的系数存在着弱

逼近.

我们这里只考虑关于变量 t 的一个特殊类型的弱逼近。为简单起见，以后简称算子集合 $A_\tau(t)$ 为算子.

设 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=A\varphi+f,\\ \varphi(x,\ 0)=g(x)\end{cases}\tag{1}$$

是适定的．即其解具有对初始条件的连续相依性。

令
$$A=\sum_{i=1}^{m}A_i,$$

即算子 A 可以分裂为比它有较简单结构的一组算子 A_1, A_2, $\cdots$, A_m.

考察算子

$$A_\tau=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(\tau,\ t)A_i,\tag{2}$$

其中函数 $\alpha_i(\tau,\ t)\,(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$是用下面的方式定义的:

$$\alpha_i(\tau,\ t)=m\delta_{ik},\quad t_j+\frac{k-1}{m}\tau<t\leqslant t_j+\frac{k}{m}\tau,$$

其中 $$\delta_{i,k}=\begin{cases}1,\ 当\ i=k\ 时;\\ 0,\ 当\ i\neq k\ 时;\end{cases}\quad i,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ m.$$

不难证明，算子 A_τ 是弱逼近于算子 A 的.

考虑弱逼近于问题(1)的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi_\tau}{\partial t}=A_\tau\varphi_\tau+f_\tau,\\ \varphi_\tau(x,\ 0)=g(x),\end{cases}\tag{3}$$

其中 f_τ 可以是 f 的弱逼近，也可以是它的强逼近，特别地可取 $f_\tau=f$.

我们怎样来理解问题(3)的解 $\varphi_\tau(x,\ t)$呢？从前一节的三个例子已经看到求解弱近似问题的具体步骤．对问题 (3) 而

言，处理原则也是一样的．为简单起见，设 $f=0$．

当 $t\in[0,\ \tau]$ 时，我们将它分成 m 个相等的小区间 $\left[\frac{i-1}{m}\tau,\ \frac{i}{m}\tau\right]$($i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$)．这时，问题(3)变成下面一序列问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi_\tau^i}{\partial t}=mA_i, & \dfrac{i-1}{m}\tau<t\leqslant\dfrac{i}{m}\tau;\\ \varphi_\tau^i\left(x,\ \dfrac{i-1}{m}\tau\right)=\varphi_\tau^{i-1}\left(x,\ \dfrac{i-1}{m}\tau\right), & i=1,\ 2,\ \cdots,\ m.\end{cases}\tag{4}$$

其中
$$\varphi_\tau^0=g(x).$$

记 $\varphi_\tau(x,\ \tau)=\varphi_\tau^m(x,\ \tau)$．在求得 $\varphi_\tau(x,\ \tau)$后，我们再在区间$[\tau,\ t_2]$里解一序列问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi_\tau^i}{\partial t}=mA_i, \quad \tau+\dfrac{i-1}{m}\tau<t\leqslant\tau+\dfrac{i}{m}\tau;\\ \varphi_\tau^i\left(x,\tau+\dfrac{i-1}{m}\tau\right)=\varphi_\tau^{i-1}\left(x,\tau+\dfrac{i-1}{m}\tau\right);\\ \qquad\qquad \varphi_\tau^0(x,\ \tau)=\varphi_\tau(x,\ \tau);\end{cases}$$
$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m.$$

这样继续下去就产生了问题(3)的解 $\varphi_\tau(x,\ t)$．

我们引进下述记号：

$S(t_2,\ t_1)$是问题(1)的转移算子；

$S_\tau(t_2,\ t_1)$是问题(3)的转移算子；

$S_i(t_2,\ t_1)$是问题(4)的转移算子．

从前面讨论的关于 $\varphi_\tau(x,\ t)$的构造可知成立下面的关系：

$$S_\tau(t+\tau,\ t)=S_m\left(t+\tau,\ t+\frac{m-1}{m}\tau\right)$$
$$\cdot S_{m-1}\left(t+\frac{m-1}{m}\tau,t+\frac{m-2}{m}\tau\right)\cdots S_1\left(t+\frac{\tau}{m},\ t\right).$$

基于这一关系，故称问题(3)为算子分裂问题．我们的目的就是要弄清楚算子 $S_\tau(t_2, t_1)$，$S_i(t_2, t_1)$ 与算子 $S(t_2, t_1)$ 之间的关系．

设算子 A 为

$$A=\sum_{\alpha} a_{\alpha_1\cdots\alpha_n} D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n},$$

其中 $\quad 0\leqslant\alpha_k\leqslant q_k,\quad D_k=\dfrac{\partial}{\partial x_k}\quad (k=1, 2, \cdots, n).$

引进向量 $\tilde{\varphi}$，它的分量为

$$P^\alpha=P^{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}=D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}\varphi=D^\alpha\varphi,$$

其中组合数 $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 均取自算子 A，集合$(0, 0, \cdots, 0)$对应于 $P^0=P^{0,0,\cdots,0}=D^0\varphi=\varphi$，为向量 $\tilde{\varphi}$ 的第一个分量．

将算子 D^α 作用于方程(1)的两端，则左端为

$$D^\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}D^\alpha\varphi=\frac{\partial}{\partial t}P^\alpha,$$

右端为 $\qquad D^\alpha(A\varphi+f)=D^\alpha(A\varphi)+D^\alpha f.$

应用微分法: $\qquad D_i(aP^\beta)=P^\beta D_i a+aD_iP^\beta,$

其中 a 为矩阵的某一系数，$P^\beta=P^{\beta_1,\cdots,\beta_n}$．则由 D^α 作用后的方程(1)化成为

$$\frac{\partial P^\alpha}{\partial t}=L^\alpha\tilde{\varphi}+D^\alpha f,$$

其中 L^α 是某一微分算子．因 P^α 是 $\tilde{\varphi}$ 的分量，故组合上述各分量得到方程组:

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial t}=\tilde{A}\tilde{\varphi}+\tilde{f}, \tag{5}$$

称它为方程(1)的开拓．

例如方程

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\sum_{\alpha}a_{\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{\alpha}}=0,\quad \alpha=1,\ 2. \tag{6}$$

设 $P^i=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}$，对(6)关于 x_i 微分得

$$\frac{\partial P^i}{\partial t}+\sum_{\alpha}\frac{\partial q_{\alpha}}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{\alpha}}+\sum_{\alpha}a_{\alpha}\frac{\partial P^i}{\partial x_{\alpha}}=0,\quad i,\ \alpha=1,\ 2.$$

记 $\tilde{\varphi}=(\varphi,\ P^1,\ P^2)$，则原方程(6)与上面两个方程一起可表示为

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial t}=\tilde{A}\tilde{\varphi},$$

其中 $$\tilde{A}=-\begin{bmatrix}\sum_{\alpha}a_{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} & 0 & 0\\ \sum_{\alpha}\frac{\partial a_{\alpha}}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} & \sum_{\alpha}a_{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} & 0\\ \sum_{\alpha}\frac{\partial a_{\alpha}}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} & 0 & \sum_{\alpha}a_{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\end{bmatrix},$$

它就是(6)的开拓方程组.

若(6)的系数均为常数，则 $\dfrac{\partial a_{\alpha}}{\partial x_i}=0$，即任何导数 P^{α} 像函数 φ 一样满足同一方程，故算子 $\tilde{A}$ 呈对角形

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}A & 0 & 0\\ 0 & A & 0\\ 0 & 0 & A\end{bmatrix}.$$

我们将开拓方程组(5)的算子 $\tilde{A}$ 相应地分裂为

$$\tilde{A}=\sum_{i=1}^{m}\tilde{A}_i,$$

其弱逼近方程组记为

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}_t}{\partial t}=\tilde{A}_{\tau}\tilde{\varphi}_{\tau}+\tilde{f}_{\tau}. \tag{7}$$

引进下述记号:

$\widetilde{S}(t_2, t_1)$为方程(5)的转移算子;

$\widetilde{S}_\tau(t_2, t_1)$为方程(7)的转移算子;

$\widetilde{S}_i(t_2, t_1)$为方程

$$\frac{\partial\widetilde{\varphi}_\tau}{\partial t}=m\widetilde{A}_i\widetilde{\varphi}_\tau$$

的转移算子.

可以建立下面的关系式

$$\widetilde{S}_\tau(t+\tau, t)=\widetilde{S}_m\left(t+\tau,\ t+\frac{m-1}{m}\tau\right)$$

$$\cdot\widetilde{S}_{m-1}\left(t+\frac{m-1}{m},\ t+\frac{m-2}{m}\right)\cdots\widetilde{S}_1\left(t+\frac{1}{m}\tau, t\right).$$

由此可见,开拓方程的分裂是原方程分裂后的开拓. 换言之,算子的开拓与分裂可交换的.

只要假定

$$P_0^\alpha=D^\alpha g,\ P_0^{\alpha+\beta}=D^{\alpha+\beta}g,$$

则对应于一个开拓方程组有一个开拓的 Cauchy 问题.

我们用 I 与 I_τ 分别表示 Cauchy 问题(1)与(3). 而以 $\widetilde{I}$ 与 $\widetilde{I}_\tau$ 表示其开拓后的 Cauchy 问题.

设问题 I 与 I_τ 定义在同一个 Banach 空间 B 里;问题 $\widetilde{I}$ 与 $\widetilde{I}_\tau$ 定义在同一 Banach 空间 $\widetilde{B}$ 里. $\widetilde{B}$ 中的模可定义如下:

$$\|\widetilde{\varphi}\|_{\widetilde{B}}^2=\sum_\alpha\|P^\alpha\|_B^2.$$

下面要讨论一致适定问题的解的一些性质,为建立问题(3)的解收敛到问题(1)的解的定理作理论准备.

§3 一些预备定理

这一节要给出一致适定方程组的解的性质的一些定理.

所谓一致适定，是指该方程的解算子 $S(t_2, t_1)$ 对任何 $t_1, t_2 \in [0, T]$，又 $t_1 \leqslant t_2$，有估计式

$$\|S(t_2, t_1)\| \leqslant e^{\alpha(t_2-t_1)},$$

其中 α 为仅与 T 有关的常数.

我们先考察齐次方程的情形（$f=0$）.

定理 4.1 若方程组(1)一致适定，则其解 $\varphi(t)$ 一致连续.

证 由于算子 $S(t+\tau, t)$ 连续，函数 $\varphi(t)$ 关于 t 连续（对任何 $t \in [0, T]$）. 根据 Cantor 定理，$\varphi(t)$ 是一致连续的.

定理 4.2 若问题 I 与 $\tilde{I}$ 均一致适定；且系数 a_α 关于 t 均一致连续，则 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$ 与 $A\varphi$ 存在，且关于 t 一致连续，并满足方程

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = A\varphi.$$

证 向量 $\tilde{\varphi}(t) = \{P^\alpha(t)\}$ 对任何 $t \in [0, T]$ 均存在. 因此，表达式 $A\varphi = \sum\limits_\alpha a_\alpha(t) P^\alpha(t)$ 也存在（对于 $t \in [0, T]$）. 根据定理 4.1，作为一致连续向量 $\tilde{\varphi}(t)$ 的分量的 $P^\alpha(t)$ 必一致连续. 故由定理的条件知 $A\varphi$ 是一致连续的.

从广义解的定义有

$$\varphi(t) = \lim \varphi(\varepsilon, t), \quad \varepsilon \to 0,$$

其中极限在 $\widetilde{B}$ 中关于 t 是一致的，且 $\varphi(\varepsilon, t) \in \widetilde{B}$ 是问题 I 的解析解. 它们满足

$$\frac{\partial \varphi(\varepsilon, t)}{\partial t} = A(t)\varphi(\varepsilon, t),$$

$$\varphi(\varepsilon, t+\tau) - \varphi(\varepsilon, t) = \int_t^{t+\tau} A(\theta)\varphi(\varepsilon, \theta)\mathrm{d}\theta.$$

按模 $\|\cdot\|_B$ 取极限得

$$\varphi(t+\tau)-\varphi(t)=\int_t^{t+\tau} A(\theta)\varphi(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

因 $A(t)\varphi(t)$ 一致连续，则

$$\frac{\varphi(t+\tau)-\varphi(t)}{\tau}\to\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t}=A(t)\varphi(t),\ \tau\to 0$$

时. 且 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$ 一致连续. 定理得证.

下面考虑非齐方程($f\neq 0$)的情形.

定理 4.3 若问题 I 与 $\tilde{I}$ 一致适定; $g\in\tilde{B}$, 且 $f(t)\in\tilde{B}$ 关于 t 一致连续，则公式

$$\varphi(t)=S(t,\ 0)g+\int_0^t S(t,\ \theta)f(\theta)\mathrm{d}\theta \tag{8}$$

构成问题:
$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=A\varphi+f,\\ \varphi(0)=g\end{cases}$$

的解.

证 首先研究函数

$$F(t,\ \theta)=S(t,\ \theta)f(\theta)$$

的性质. 对于固定的 θ, $F(t,\ \theta)$ 是问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=A\varphi,\\ \varphi(\theta)=f(\theta)\end{cases}$$

的解. 根据定理 4.1, $F(t,\ \theta)$ 于 B 及 $\tilde{B}$ 内一致连续(关于 t).

让我们依 B 模来计算差分

$$\begin{aligned}&F(t,\ \theta+h)-F(t,\ \theta)\\ &\quad=S(t,\ \theta+h)f(\theta+h)-S(t,\ \theta)f(\theta)\\ &\quad=S(t,\ \theta+h)[f(\theta+h)-f(\theta)]\\ &\qquad+[S(t,\ \theta+h)-S(t,\ \theta)]f(\theta)\end{aligned}$$

$$=S(t,\ \theta+h)[f(\theta+h)-f(\theta)]$$
$$+S(t,\ \theta+h)[I-S(\theta+h,\ \theta)]f(\theta).$$

因 $f(\theta)$ 一致连续，故当 $h\to 0$ 时，上式右端第一项关于 θ 一致地趋于零．现在来计算第二项，其中

$$[I-S(\theta+h,\ \theta)]f(\theta)=-[F(\theta+h,\ \theta)-f(\theta)].$$

由 $F(t,\ \theta)$ 的性质知这一项在 $h\to 0$ 时对任何 θ 它都趋向零．因此，函数 $F(t,\ \theta)$ 关于 θ 连续，这意味着它在区间 $[0,\ t]$ 内一致连续，且于 B 内积分

$$F(t)=\int_0^t F(t,\ \theta)\mathrm{d}\theta$$

存在．类似地可证它在 $\widetilde{B}$ 内也存在．

考虑差分

$$\begin{aligned}
&\varphi(t+\tau)-\varphi(t)\\
&=[S(t+\tau,\ 0)-S(t,\ 0)]g+\int_t^{t+\tau}S(t+\tau,\ \theta)f(\theta)\mathrm{d}\theta\\
&\quad+\int_0^t[S(t+\tau,\ \theta)-S(t,\ \theta)]f(\theta)\,\mathrm{d}\theta\\
&=[S(t+\tau,\ t)-I]S(t,\ 0)g+\int_t^{t+\tau}S(t+\tau,\ \theta)f(\theta)\mathrm{d}\theta\\
&\quad+\int_0^t[S(t+\tau,\ t)-I]S(t,\ \theta)f(\theta)\mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

应用表达式(8)，则上式化成

$$\begin{aligned}
&\varphi(t+\tau)-\varphi(t)\\
&=[S(t+\tau,\ t)-I]\left[\varphi(t)-\int_0^t S(t,\ \theta)f(\theta)\mathrm{d}\theta\right]\\
&\quad+\int_t^{t+\tau}S(t+\tau,\ \theta)f(\theta)\mathrm{d}\theta\\
&\quad+\int_0^t[S(t+\tau,\ t)-I]S(t,\ \theta)f(\theta)\mathrm{d}\theta\\
&=[S(t+\tau,\ t)-I]\varphi(t)+\int_t^{t+\tau}S(t+\tau,\ \theta)f(\theta)\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

$$+\int_0^t [S(t+\tau,\ t)-I]S(t,\ \theta)f(\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$-[S(t+\tau,\ t)-I]\int_0^t S(t,\ \theta)f(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

上式中最后两项可互相抵消，且除以 τ 后得到

$$\frac{\varphi(t+\tau)-\varphi(t)}{\tau}=\frac{[S(t+\tau,\ t)-I]}{\tau}\varphi(t)+\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} S(t+\tau,\ \theta)f(\theta)\mathrm{d}\theta. \tag{9}$$

由定理 4.2 知 $F(t,\ 0)\in\widetilde{B}$. 记 $F(t)=F(t,\ 0)$，又因 $\varphi(0)=g\in\widetilde{B}$，故

$$\varphi(t)=S(t,\ 0)\varphi(0)+F(t)\in\widetilde{B}.$$

但另方面

$$\frac{[S(t+\tau,\ t)-I]}{\tau}\varphi(t)=\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} A(\theta)\psi(\theta)\mathrm{d}\theta,$$

其中 $\psi(\theta)$ 是 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi(\theta)}{\partial\theta}=A(\theta)\psi(\theta), & t<\theta\leqslant t+\tau;\\ \psi(t)=\varphi(t)\end{cases}$$

的解．因 $A(\theta)\psi(\theta)$ 与 $S(t+\tau,\ \theta)f(\theta)$ 均一致连续，则应用中值定理及当 $\tau\to 0$ 时 (9) 式取极限即得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=A(t)\varphi(t)+f(t).$$

由等式 (8) 知初始条件也满足，定理得证．

甚至当 $\varphi(\theta)\in B,\ f(\theta)\in B$ 且问题 I 一致适定时，公式 (8) 也有意义．在这种情形，它可以用来作为确定问题 I_τ 的广义解之基础．

从定理 4.3 可得

定理 4.4 若问题 I 适定，则问题 I_τ 的解连续依赖于右

端 f(即关于右端适定).

实际上,

$$\|\varphi(t)\| \leqslant \|S(t, 0)\| \|g\| + \int_0^t \|S(t, \theta)\| \|f(\theta)\| d\theta$$

$$\leqslant e^{\alpha t} \|g\| + \int_0^t e^{\alpha(t-\theta)} \|f(\theta)\| d\theta.$$

以后我们就用公式(8)作为问题 I_τ 在定理 4.3 意义下的解.

定理 4.1、4.2 和定理 4.3 对问题 I_τ 仍然有效.

§4 Яненко-Демидов 定理

定理 4.5(Яненко-Демидов 定理) 若

1. 问题 I_τ 与 $\tilde{I}_\tau$ 于 B 及 $\tilde{B}$ 中一致适定;
2. I_τ 关于右端适定;
3. $A_i\varphi$(对问题 I 的解 φ)关于 t 一致连续;
4. $g\in \tilde{B}$,

则 $\varphi(t)$ 是问题 I 的满足条件 3, 4 的唯一解; 且当 $\tau\to 0$ 时 $\varphi_\tau(t)$ 关于 t 一致地强收敛于 $\varphi(t)$.

也就是说,若分裂问题 I_τ 及其开拓 $\tilde{I}_\tau$ 都适定,且原问题 I 之解充分光滑,则这个解是唯一的,且分裂问题 I_τ 之解收敛于它.

证 令 $\varphi(t)$ 是问题 I 带有初始条件 $g\in B$ 的解, $\varphi_\tau(t)$ 是问题 I_τ 带有同样初始条件 g 的解. 则函数 $v(t)=\varphi_\tau(t)-\varphi(t)$ 是问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}=A_\tau v+(A_\tau-A)\varphi(t),\\ v|_{t=0}=0\end{cases}$$

的解．由定理 4.3 知 $v(t)$是从下式计算得来的：

$$v(t)=\int_0^t S_\tau(t,\ \theta)(A_\tau-A)\varphi(\theta)\mathrm{d}\theta=\sum_{i=1}^m v_i(t),$$

其中 $$v_i(t)=\int_0^t S_\tau(t,\ \theta)\varepsilon_i(\tau,\ \theta)\psi_i(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$\varepsilon_i(\theta)=\alpha_i(\tau,\ \theta)-1;\ \psi_i(\theta)=A_i(\theta)\varphi(\theta).$$

令 $$t=j\tau+\frac{i-1}{m}\tau+\eta,\quad \eta\in\left[0,\ \frac{\tau}{m}\right].$$

则 $$\int_0^t=\int_0^{j\tau}+\int_{j\tau}^{j\tau+\frac{i-1}{m}\tau+\eta}.$$

由于问题 I_τ 的一致适定性，第二个积分是 $O(\tau)$阶的(关于 t 一致地)．因而在 $t=t_j$ 处计算积分 $v_i(t)$ 就够了．对于 $v_i(t)$ 有表达式

$$v_i(t)=\sum_{k=0}^{j-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} S_\tau(t,\ \theta)\varepsilon_i(\tau,\ \theta)\psi_i(\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\sum_{k=0}^{j-1}\sum_{l=1}^{m}\int_{\left(k+\frac{l-1}{m}\right)\tau}^{\left(k+\frac{l}{m}\right)\tau} S_\tau(t,\ \theta)\varepsilon_i(\tau,\ \theta)\psi_i(\theta)\mathrm{d}\theta$$

而 $\varepsilon_i(\tau,\ \theta)$有表达式

$$\varepsilon_i(\tau,\ \theta)=\alpha_i(\tau,\ \theta)-1=m\delta_{ij}-1,$$

$$\theta\in\left[\left(k+\frac{l-1}{m}\right)\tau,\ \left(k+\frac{l}{m}\right)\tau\right].$$

将它代入上式得

$$v_i(t)=\sum_{k=0}^{j-1}\sum_{l=1}^{m}\int_{\left(k+\frac{l-1}{m}\right)\tau}^{\left(k+\frac{l}{m}\right)\tau}\left[S_\tau\left(t,\ \theta+\frac{i-l}{m}\tau\right)\right.$$

$$\left.\cdot\psi_i\left(\theta+\frac{i-l}{m}\tau\right)-S_\tau(t,\ \theta)\psi_i(\theta)\right]\mathrm{d}\theta.$$

这样一来，$v_i(t)$的计算就化成关于一致适定算子 $S_\tau(t,\theta)$ 及一致连续函数 $\psi(\theta)$的下述类型的表达式的计算：

$$\int_a^{a+h_1} S_\tau(t, \theta+h_2)\psi(\theta+h_2)-S_\tau(t, \theta)\psi(\theta)]\mathrm{d}\theta.$$

它可表示成和的形式：

$$\int_a^{a+h_1}[S_\tau(t, \theta+h_2)-S_\tau(t, \theta)]\psi(\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$+\int_a^{a+h_1} S_\tau(t, \theta+h_2)[\psi(\theta+h_2)-\psi(\theta)]\mathrm{d}\theta.$$

由于 $S_\tau(t, \theta)$ 的一致适定性及 $\psi(\theta)$ 的一致连续性，上式第二项是 $h_1\alpha(h_2)$ 阶的，其中 $\alpha(h_2)\to 0$，当 $h_2\to 0$ 时．关于模有

$$L_2\psi_i\equiv\sum_{k=0}^{j-1}\sum_{l=1}^{m}\int_{\left(k+\frac{l-1}{m}\right)\tau}^{\left(k+\frac{l}{m}\right)\tau} S_\tau\left(t, \theta+\frac{i-l}{m}\tau\right)$$

$$\cdot\left[\psi_i\left(\theta+\frac{i-l}{m}\tau\right)-\psi_i(\theta)\right]\mathrm{d}\theta=O(\alpha(\tau)).$$

下面计算和中的第一项．为简化起见，设 h_2 为正数．应用关系式

$$S_\tau(t, \theta)=S_\tau(t, \theta+h_2)S_\tau(\theta+h_2, \theta),$$

则和式中的第一项就可写成

$$\int_a^{a+h_1} S_\tau(t, \theta+h_2)[I-S_\tau(\theta+h_2, \theta)]\psi(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

考察表达式

$$[S_\tau(\theta+h_2, \theta)-I]\psi(\theta).$$

设 $\psi_\tau(t)$ 是 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi_\tau}{\partial t}=A_\tau\psi_\tau,\\ \psi_\tau(\theta)=\psi(\theta)\end{cases}$$

的解．则表达式正是

$$\psi_\tau(\theta+h_2)-\psi_\tau(\theta).$$

若 $\psi(\theta)\in\widetilde{B}$，则

$$\psi_\tau(\theta+h_2)-\psi_\tau(\theta)=\int_\theta^{\theta+h_2} A_\tau\psi_\tau\,\mathrm{d}t.$$

由于 I_τ 适定，$A_\tau\psi_\tau$ 存在且有界，又

$$\int_\theta^{\theta+h_2} A_\tau\psi\,\mathrm{d}\theta=O(h_2)$$

关于 t, τ 一致地成立.

这样一来，对于 $\psi(\theta)\in\widetilde{B}$ 也有

$$\int_a^{a+h_1}[S_\tau(t,\ \theta+h_2)-S_\tau(t,\ \theta)]\psi(\theta)\,\mathrm{d}\theta=O(h_1h_2),$$

因而对于 $\psi(\theta)\in\widetilde{B}$，关于模有

$$L_1\psi_i=\sum_{k=0}^{j-1}\sum_{l=1}^{m}\int_{\left(k+\frac{l-1}{m}\right)\tau}^{\left(k+\frac{l}{m}\right)\tau}\left[S_\tau\left(t,\ \theta+\frac{i-l}{m}\tau\right)\right.$$

$$\left.-S_\tau(t,\ \theta)\right]\psi_i(\theta)\,\mathrm{d}\theta=O(\tau).$$

L_1 可视为作用在函数 $\varphi(t)$ 上的算子 $L_1(\tau)$ 的集合. 因为

$$\|L_1(\tau)\psi_i\|\leqslant C(T)\max\|A_i\varphi\|,$$

则对于 $\varphi\in\widetilde{B}$ 及 $\psi_i\in B$，算子 $L_1(\tau)$ 的集合是一致有界的. 因 $\varphi\in\widetilde{B}$, $\|L_1(\tau)\psi\|\to 0$，则根据 Banach-Steinhaus 定理，$L_1(\tau)$ 收敛于零算子，亦即对于 $\psi_i=A_i\varphi\in B$，当 $\tau\to 0$ 时表达式 $L_1(\tau)\to 0$.

注意到 $\quad v(t)=\sum_{i=1}^{m}v_i(t)=\sum_{i=1}^{m}(L_1+L_2)\psi_i,$

我们得到最后的估计式

$$\|v(t)\|\to 0,\quad \text{当 } \tau\to 0 \text{ 时}.$$

定理得证.

对于常系数方程，则只要问题 I_τ 适定就够了，这时定理中的条件减少为初始条件的充分光滑性.

这个定理表明：弱逼近于问题 I 的分裂问题 I_τ 的解

$\varphi_\tau(t)$强收敛到问题 I 的解 $\varphi(t)$. 此外，我们从分裂问题 I_τ 的解的存在性导出问题 I 的解的存在与适定性，而且借助于算子 $S_\tau(t_2, t_1)$给出转移算子 $S(t_2, t_1)$一个构造性定义. 由于算子 $S_\tau(t_2, t_1)$是以具有更简单结构的 m 个算子之积来表示的，所以这种分裂法是有利于计算实施的. 前两章讨论的按算子分量的分裂法可视为弱逼近方法的一种离散化模拟.(或者反过来理解，本章介绍的这种特殊的弱逼近方法，正是前面讨论过的按算子分量分裂法在微分方程中的应用.)沿着这个方向我们将进行另一类算子分裂法的研究.

§5 解发展问题的弱逼近-Галеркин 方法

前面几节讨论了在 Banach 空间 Cauchy 问题的解的一种构造方法，这类方法恰好给我们构造离散化的算子分裂格式提供了一种理论基础和一条十分自然的途径.

这一节我们考虑发展问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}+A\varphi=f, \quad (x, t)\in\Omega\times[0, T];\\ \varphi(x, 0)=g(x), \quad x\in\Omega;\\ \varphi|_{\Gamma\times[0,T]}=0.\end{cases} \tag{10}$$

其中 $\Omega\subset R^n$ 为正规区域:

$$\Omega=\{x|a_i<x_i<b_i, a_i, b_i \text{ 为常数 } (i=1, 2, \cdots, n)\},$$

Γ 为 Ω 之边界.

设 $A\geqslant0$, 又 $A=\sum\limits_{i=1}^m A_i$, 且 $A_i\geqslant0(i=1, 2, \cdots, m)$.

首先考虑 A 与时间 t 无关的情形.

问题(10)的弱逼近问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial\varphi_\tau}{\partial t}+A_\tau\varphi_\tau=f_\tau, & (x,\ t)\in\Omega\times[0,\ T];\\
\varphi_\tau(x,\ 0)=g(x), & x\in\Omega;\\
\varphi_\tau\big|_{\Gamma\times[0,T]}=0.
\end{cases}
\tag{11}
$$

其中:

$$
A_\tau=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(\tau,\ t)A_i,
\tag{12}
$$

$$
\alpha_i(\tau,\ t)=m\delta_{ik},\quad t_j+\frac{k-1}{m}\tau<t\leqslant t_j+\frac{k}{m}\tau,
$$

$$
\delta_{ik}=\begin{cases}1, & \text{当 } i=k,\\ 0, & i\neq k,\end{cases}
$$

$$
t_j=j\tau\quad\left(j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ M=\left[\frac{T}{\tau}\right]\right),
$$

f_τ 可以是 f 的弱逼近，也可以是强逼近，特别可以取 $f_\tau=f$.

我们把 t 当作参数看待，则可以定义问题(11)的弱形式为:

求 $\varphi_\tau\in H_0^r(\Omega)$使

$$
\begin{cases}
\left(\dfrac{\partial\varphi_\tau}{\partial t},\ \psi\right)+a_\tau(\varphi_\tau,\ \psi)=(f_\tau,\ \psi), & \forall\psi\in H_0^r(\Omega);\\
(\varphi_\tau,\ \psi)=(g,\ \psi),\ t=0\text{ 时}, & \forall\psi\in H_0^r(\Omega).
\end{cases}
\tag{13}
$$

其中 $a(\varphi_\tau,\ \psi)$表示与算子 A_τ 相应的双线性形，r 是与算子 A_τ 关于空间变量的微商的阶有关的正常数. 问题(13)的解称为问题(11)在 Галеркин 意义下的广义解. 容易证明，若 φ_τ 满足(11)，则必满足(13).

我们引入$(L+1)$维空间 $S^{L+1}(\Omega)\subset H_0^r(\Omega)$，它的基函数为 $\{\psi_l\}_0^L$. 我们要求问题(13)其下述形式的近似解(我们仍记作 φ_τ):

$$\varphi_\tau = \sum_{l=0}^{L} \bar{\varphi}_\tau^l(t)\psi_l(x).$$

从(13)知有

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial \varphi_\tau}{\partial t}, \psi_i\right) + a_\tau(\varphi_\tau, \psi_i) = (f_\tau, \psi_i), \\ (\varphi_\tau, \psi_i) = (g, \psi_i), \text{ 当 } t=0 \text{ 时}, \end{cases} \quad \forall \psi_i \in S^{L+1}(\Omega).$$

即

$$\begin{cases}\sum_{l=0}^{L}\left[\dfrac{d\bar{\varphi}_\tau^l}{dt}(\psi_l, \psi_i) + \bar{\varphi}_\tau^l a_\tau(\psi_l, \psi_i)\right] = (f_\tau, \psi_i), t \in (0, T], \\ \sum_{l=0}^{L} \bar{\varphi}_\tau^l(0)(\psi_l, \psi_i) = (g, \psi_i), \end{cases} \tag{14}$$

$$i = 0, 1, \cdots, L.$$

由于 A_τ 具有(12)的形式，故在不同的时段$\left(t_j + \dfrac{k-1}{m}\tau, t_j + \dfrac{k}{m}\tau\right]$双线性形 $a_\tau(\psi_l, \psi_i)$有不同的形式. 我们记 A_k 相应的双线性形为 $a_k(\varphi, \psi)$，则(14)变成

$$\begin{cases}\sum_{l=0}^{L}\left[\dfrac{d\bar{\varphi}_\tau^l}{dt}(\psi_l, \psi_i) + m\bar{\varphi}_\tau^l a_k(\psi_l, \psi_i)\right] = (f_\tau, \psi_i), \\ \qquad t \in \left(t_j + \dfrac{k-1}{m}\tau, t_j + \dfrac{k}{m}\tau\right], \\ \qquad k = 1, 2, \cdots, m, \\ \qquad j = 0, 1, \cdots, M-1; \\ \sum_{l=0}^{L} \bar{\varphi}_\tau^l(\psi_l, \psi_i) = (g, \psi_i), \quad t = 0, \\ \qquad i = 0, 1, \cdots, L. \end{cases} \tag{15}$$

若记 $\quad \bar{\varphi}_\tau = (\bar{\varphi}_\tau^0, \bar{\varphi}_\tau^1, \cdots, \bar{\varphi}_\tau^L)^T,$

$$\Psi = \begin{bmatrix} (\psi_0, \psi_0), & (\psi_0, \psi_1), & \cdots, & (\psi_0, \psi_L) \\ (\psi_1, \psi_0), & (\psi_1, \psi_1), & \cdots, & (\psi_1, \psi_L) \\ \vdots & & & \\ (\psi_L, \psi_0), & (\psi_L, \psi_1), & \cdots, & (\psi_L, \psi_L) \end{bmatrix}^T, \tag{16}$$

$$K_k=\begin{bmatrix} a_k(\psi_0,\ \psi_0),\ a_k(\psi_0,\ \psi_1),\ \cdots,\ a_k(\psi_0,\ \psi_L) \\ a_k(\psi_1,\ \psi_0),\ a_k(\psi_1,\ \psi_1),\ \cdots,\ a_k(\psi_1,\ \psi_L) \\ \vdots \\ a_k(\psi_L,\ \psi_0),\ a_k(\psi_L,\ \psi_1),\cdots,\ a_k(\psi_L,\ \psi_L) \end{bmatrix}^T, \quad (17)$$

$$F_\tau=(F_\tau^0,\ F_\tau^1,\ \cdots,\ F_\tau^L)^T, \text{其中 } F_\tau^l=(f_\tau,\ \psi_l),$$

$$G=(G^0,\ G^1,\ \cdots,\ G^L)^T, \text{其中 } G^l=(g,\ \psi_l).$$

则由(15)之第二式

$$\Psi\bar{\varphi}_\tau(0)=G$$

可解出 $\bar{\varphi}_\tau(0)=(\bar{\varphi}_\tau^0(0),\ \bar{\varphi}_\tau^1(0),\ \cdots,\ \bar{\varphi}_\tau^L(0))^T$. 于是得到常微分方程组的初值问题:

$$\begin{cases}\Psi\dfrac{d\bar{\varphi}_\tau}{dt}+mK_k\bar{\varphi}_\tau=F_\tau, \quad t\in\left(t_j+\dfrac{k-1}{m}\tau,\ t_j+\dfrac{k}{m}\tau\right], \\ \bar{\varphi}_\tau\big|_{t=0}=\bar{\varphi}_\tau(0). \end{cases} \quad (18)$$

由于 A_k 与 t 无关, 故 K_k 与 t 无关, 它可以根据(17)先计算出来的. 矩阵 Ψ 也与 t 无关,而且显然是对称的,又因

$$(\Psi\bar{\varphi}_\tau,\ \bar{\varphi}_\tau)=\sum_{i=0}^{L}\sum_{j=0}^{L}(\psi_i,\ \psi_j)\bar{\varphi}_\tau^i\bar{\varphi}_\tau^j$$

$$=\left(\sum_{i=0}^{L}\bar{\varphi}_\tau^i\psi_i,\ \sum_{j=0}^{L}\bar{\varphi}_\tau^j\psi_j\right)=(\varphi_\tau,\ \varphi_\tau),$$

由此可见 $(\Psi\bar{\varphi}_\tau,\ \bar{\varphi}_\tau)=(\varphi_\tau,\ \varphi_\tau)>0$, 若 $\bar{\varphi}_\tau\neq0$,

即矩阵 Ψ 是正定的. 由 $\Psi>0$, 故 Ψ^{-1} 存在. 又

$$(K_k\bar{\varphi}_\tau,\ \bar{\varphi}_\tau)=\sum_{i,j=0}^{L}a_k(\psi_i,\ \psi_j)\bar{\varphi}_\tau^i\bar{\varphi}_\tau^j$$

$$=\left(A_k\sum_{i=0}^{L}\bar{\varphi}_\tau^i\psi_i,\ \sum_{j=0}^{L}\bar{\varphi}_\tau^j\psi_j\right)$$

$$=(A_k\varphi_\tau,\ \varphi_\tau).$$

因 $A_k\geqslant0$, 故

$$(K_k\bar{\varphi}_\tau,\ \bar{\varphi}_\tau)\geqslant0,$$

即 $K_k\geqslant0$. 故 $\Psi^{-1}K_k\geqslant0$. 实际上,

$$(\Psi^{-1}K_k\bar{\varphi}_\tau,\ \bar{\varphi}_\tau)=(\Psi^{-\frac{1}{2}}\Psi^{-\frac{1}{2}}K_k\Psi^{\frac{1}{2}}\Psi^{-\frac{1}{2}}\bar{\varphi}_\tau,\ \bar{\varphi}_\tau)$$
$$=(\Psi^{-\frac{1}{2}}K_k\Psi^{\frac{1}{2}}\Psi^{-\frac{1}{2}}\bar{\varphi}_\tau,\ \Psi^{-\frac{1}{2}}\bar{\varphi}_\tau)$$
$$=(\Psi^{-\frac{1}{2}}K_k\Psi^{\frac{1}{2}}\bar{v}_\tau,\ \bar{v}_\tau),$$

其中 $\bar{v}_\tau=\Psi^{-\frac{1}{2}}\bar{\varphi}_\tau$，因 $\Psi^{-\frac{1}{2}}K_k\Psi^{\frac{1}{2}}$ 与 K_k 相似，故

$$\Psi^{-\frac{1}{2}}K_k\Psi^{\frac{1}{2}}\geqslant 0,$$

因而有 $(\Psi^{-1}K_k\bar{\varphi}_\tau,\ \bar{\varphi}_\tau)=(\Psi^{-\frac{1}{2}}K_k\Psi^{\frac{1}{2}}\bar{v}_\tau,\ \bar{v}_\tau)\geqslant 0.$

记

$$\Psi^{-1}K_k=\bar{A}_k,\ \Psi^{-1}F_\tau=\bar{F}_\tau, \tag{19}$$

则(18)可改写成

$$\begin{cases}\dfrac{d\bar{\varphi}_\tau}{dt}+m\bar{A}_k\bar{\varphi}_\tau=\bar{F}_\tau,\ \ t\in\left(t_j+\dfrac{k-1}{m}\tau,\ t_j+\dfrac{k}{m}\tau\right],\\ \bar{\varphi}_\tau\big|_{t=0}=\bar{\varphi}_\tau(0),\end{cases} \tag{20}$$
$$k=1,\ 2,\ \cdots,\ m,$$
$$j=0,\ 1,\ \cdots,\ M-1.$$

问题(20)已是一常微分方程组的初值问题，故可用解常微分方程组的各种数值积分法求出 $\bar{\varphi}_\tau(t)$ 来. 则问题(13)之近似解即为

$$\varphi_\tau(x,\ t)=\sum_{l=0}^{L}\bar{\varphi}_\tau^l(t)\psi_l(x). \tag{21}$$

下面讨论问题(20)的数值积分方法.

先讨论 $f=0$ 的情形. 这时有 $F_\tau=0$. 因 A_i 与 t 无关. 当 τ 充分小时，则可用

$$\left[\bar{\varphi}_\tau^l\left(t_j+\frac{k}{m}\tau\right)-\bar{\varphi}_\tau^l\left(t_j+\frac{k-1}{m}\tau\right)\right]\Big/(\tau/m)$$

来代替 $\dfrac{d\varphi_\tau^l}{dt}$ 在区间 $\left[t_j+\dfrac{k}{m}\tau,\ t_j+\dfrac{k-1}{m}\tau\right]$ 上的值；同时用

$$\left[\bar{\varphi}_\tau^l\left(t_j+\frac{k}{m}\tau\right)+\bar{\varphi}_\tau^l\left(t_j+\frac{k-1}{m}\tau\right)\right]\Big/2$$

代替 $\bar{\varphi}_\tau^l(t)$，并简记

$$\bar{\varphi}_l^{j+\frac{k}{m}}=\bar{\varphi}_\tau^l\left(t_j+\frac{k}{m}\tau\right),$$

$$\bar{\varphi}^{j+\frac{k}{m}}=\left(\bar{\varphi}_0^{j+\frac{k}{m}},\ \bar{\varphi}_1^{j+\frac{k}{m}},\ \cdots,\ \bar{\varphi}_L^{j+\frac{k}{m}}\right)^T.$$

则(20)化成差分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\bar{\varphi}^{j+\frac{k}{m}}-\bar{\varphi}^{j+\frac{k-1}{m}}}{\tau}+\bar{A}_k\dfrac{\bar{\varphi}^{j+\frac{k}{m}}+\bar{\varphi}^{j+\frac{k-1}{m}}}{2}=0,\\ \qquad t\in\left(t_j+\dfrac{k-1}{m}\tau,\ t_j+\dfrac{k}{m}\tau\right],\\ \bar{\varphi}^0=\bar{\varphi}_\tau(0)\,(=\Psi^{-1}G),\ t=0.\end{cases}\tag{22}$$

它可写成

$$\begin{cases}\bar{\varphi}^0=\bar{\varphi}_\tau(0),\\ \left(I+\dfrac{\tau}{2}\bar{A}_k\right)\bar{\varphi}^{j+\frac{k}{m}}=\left(I-\dfrac{\tau}{2}\bar{A}_k\right)\bar{\varphi}^{j+\frac{k-1}{m}},\\ \qquad k=1,\ 2,\ \cdots,\ m,\\ \qquad j=0,\ 1,\ \cdots,\ M-1.\end{cases}\tag{23}$$

从(23)消去分数步后得

$$\begin{cases}\bar{\varphi}^{j+1}=T\bar{\varphi}^j,\ \bar{\varphi}^0=\bar{\varphi}_\tau(0),\\ j=\ ,\ 1,\ \cdots,\ M-1,\end{cases}\tag{24}$$

其中

$$T=\prod_{k=m}^{1}T_k,$$

$$T_k=\left(I+\frac{\tau}{2}\bar{A}_k\right)^{-1}\left(I-\frac{\tau}{2}\bar{A}_k\right).$$

由(19)知 $\bar{A}_k\geqslant 0$，又 $\tau>0$. 由 Kellogg 引理知 $\|T_k\|<1$. 故

$$\|T\|\leqslant\prod_{k=1}^{m}\|T_k\|\leqslant 1.\tag{25}$$

定理 4.6. 若 Ψ 对称正定，且 $K_k\geqslant 0$，则分裂格式(22)

绝对稳定.

证 由(24)得

$$\bar{\varphi}^j = T\bar{\varphi}^{j-1} = \cdots = T^j\bar{\varphi}^0 = T^j\Psi^{-1}G$$

故

$$\|\bar{\varphi}^j\| \leqslant \|T\|^j \|\Psi^{-1}\| \|G\|. \tag{26}$$

因 $\Psi>0$, 故存在 $\alpha(\Psi)>0$, 使得

$$\|\Psi^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\alpha(\Psi)}. \tag{27}$$

利用(25)与(27), 由(26)得

$$\|\bar{\varphi}^j\| \leqslant \frac{1}{\alpha(\Psi)}\|G\|, \quad j=0,\ 1,\ \cdots,\ M.$$

定理得证.

当 $f\neq 0$ 时, 我们定义

$$f_\tau = \alpha_m(\tau,\ t)f. \tag{28}$$

则问题(18)的右端 F_τ 有形式:

$$F_\tau = \begin{cases} (0,\ 0,\ \cdots,\ 0)^T, & t\in\left(t_j+\dfrac{k-1}{m}\tau,\ \ t_j+\dfrac{k}{m}\tau\right], \\ & k=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1, \\ m(F_0,\ F_1,\ \cdots,\ F_L)^T, & t\in\left(t_j+\dfrac{m-1}{m}\tau,\ \ t_{j+1}\right]. \end{cases}$$

其中 $F_i=(f,\ \psi_i)$. 这时, (20)的右端有

$$\bar{F}_\tau = \begin{cases} 0, & t\in\left(t_j+\dfrac{k-1}{m}\tau, t_j+\dfrac{k}{m}\tau\right], \\ & k=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1, \\ m\Psi^{-1}F=m\bar{F}, & t\in\left(t_j+\dfrac{m-1}{m}\tau,\ t_{j+1}\right]. \end{cases}$$

其中 $F=(F_0,\ F_1,\ \cdots,\ F_L)$. 因 f 是 t 的函数, 故

$$\bar{F}=\bar{F}(t),$$

离散化时, 若取 $\bar{F}^j=\bar{F}(t_{j+1})$(或 $\bar{F}(t_{j+\frac{1}{2}})$). 则象齐方程那样

可得(20)的离散后的差分方程:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\bar{\varphi}^{j+\frac{k}{m}}-\bar{\varphi}^{j+\frac{k-1}{m}}}{\tau}+\bar{A}_k\dfrac{\bar{\varphi}^{j+\frac{k}{m}}+\bar{\varphi}^{j+\frac{k-1}{m}}}{2}=0, \\
\qquad t\in\left(t_j+\dfrac{k-1}{m}\tau,\ t_j+\dfrac{k}{m}\tau\right], \\
\qquad k=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1; \\
\dfrac{\bar{\varphi}^{j+1}-\bar{\varphi}^{j+\frac{m-1}{m}}}{\tau}+\bar{A}_m\dfrac{\bar{\varphi}^{j+1}+\bar{\varphi}^{j+\frac{m-1}{m}}}{2}=\bar{F}^j, \\
\qquad t\in\left(t_j+\dfrac{m-1}{m}\tau,\ t_{j+1}\right]; \\
\bar{\varphi}^0=\bar{\varphi}_\tau(0)=\Psi^{-1}G,\quad t=0.
\end{cases}
\tag{29}
$$

$$j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ M-1.$$

它可写成

$$
\begin{cases}
\bar{\varphi}^0=\Psi^{-1}G; \\
\left(I+\dfrac{\tau}{2}\bar{A}_k\right)\bar{\varphi}^{j+\frac{k}{m}}=\left(I-\dfrac{\tau}{2}\bar{A}_k\right)\bar{\varphi}^{j+\frac{k-1}{m}}, \\
\qquad k=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1; \\
\left(I+\dfrac{\tau}{2}\bar{A}_m\right)\bar{\varphi}^{j+1}=\left(I-\dfrac{\tau}{2}\bar{A}_m\right)\bar{\varphi}^{j+\frac{m-1}{m}}+\tau\bar{F}^j.
\end{cases}
\tag{30}
$$

消去分数步得

$$
\begin{cases}
\bar{\varphi}^{j+1}=T\varphi^j+\tau\left(I+\dfrac{\tau}{2}\bar{A}_m\right)^{-1}\bar{F}^j,\quad \bar{\varphi}^0=\Psi^{-1}G, \\
j=0,\ 1,\ \cdots,\ M-1.
\end{cases}
\tag{31}
$$

记
$$\bar{T}_m=\left(I+\frac{\tau}{2}\bar{A}_m\right)^{-1},$$

由(31)推得

$$\bar{\varphi}^j=T^j\bar{\varphi}^0+\tau\sum_{i=0}^{j-1}\left(T^i\bar{T}_m\bar{F}^{j-1-i}\right). \tag{32}$$

定理 4.7 若 Ψ 对称正定，且 $K_k\geqslant 0$，则分裂格式(29)

绝对稳定.

证 在假定条件下，有(25)成立. 因 $\bar{A}_m \geqslant 0$, 由引理 A 知

$$\|\bar{T}_m\| \leqslant 1. \tag{33}$$

若记 $\|F\| = \max\limits_{0 \leqslant j \leqslant m-1} \|F^j\|, \quad \|\bar{F}\| = \max\limits_j \|\bar{F}^j\|.$

则由 $\bar{F}$ 的定义可知

$$\|\bar{F}^j\| = \|\Psi^{-1}F^j\| \leqslant \|\Psi^{-1}\| \|F^j\| \leqslant \|\Psi^{-1}\| \|F\|. \tag{34}$$

顾及(25), (33)和(34), 则由(32)推得

$$\begin{aligned}
\|\bar{\varphi}^j\| &\leqslant \|T\|^j \|\bar{\varphi}^0\| + \tau \sum_{i=0}^{j-1} (\|T\|^i \|\bar{T}_m\| \, \|\bar{F}^{j-1-i}\|) \\
&\leqslant \|\bar{\varphi}^0\| + j\tau \|\Psi^{-1}\| \|F\| \\
&\leqslant \|\Psi^{-1}\| (\|G\| + t_j \|F\|) \\
&\leqslant \frac{1}{\alpha(\Psi)} (\|G\| + t\|F\|),
\end{aligned}$$

上式对任何 $j(j\tau = t_j \in [0, T])$ 均成立. 定理得证.

§6 解发展问题的弱逼近-Галеркин 方法(续)

上一节我们已经讨论了算子 A 与时间 t 无关的情形. 这一节我们假定 A 是依赖于 t 的, 但其他假定同前.

考察问题(10)的弱逼近问题

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial \varphi_\tau}{\partial t} + A_\tau \varphi_\tau = f_\tau, \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T]; \\
\varphi_\tau(x, 0) = g(x), \ x \in \Omega; \\
\varphi_\tau |_{\Gamma \times [0, T]} = 0.
\end{cases} \tag{35}$$

其中

$$A_\tau = \sum_{i=1}^m \alpha_i A_i, \tag{36}$$

$$
\alpha_i(\tau, t)=\begin{cases} m\delta_{i,k}, & t\in\left(t_{j-1}+\dfrac{k-1}{m}\tau,\ t_{j-1}+\dfrac{k}{m}\tau\right]; \\ m\delta_{m+1-i,k}, & t\in\left(t_j+\dfrac{k-1}{m}\tau,\ t_j+\dfrac{k}{m}\tau\right]. \end{cases} \tag{37}
$$

$$
\delta_{i,k}=\begin{cases} 1, & 当\ i=k\ 时; \\ 0, & i\neq k. \end{cases}
$$

$$
i,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ m.
$$

$$
f_\tau=\begin{cases} mf, & t\in\left(t_j-\dfrac{\tau}{m},\ t_j+\dfrac{\tau}{m}\right]; \\ 0, & t\ 于别处. \end{cases} \tag{38}
$$

$j=1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ M-1$(此处设 M 为偶数).

容易验证,问题(35)确实是弱逼近于问题(10)的.

我们把时间 t 当作参数看待,则问题(35)的弱形式为

$$
\begin{cases} \left(\dfrac{\partial\varphi_\tau}{\partial t},\ \psi\right)+a_\tau(\varphi_\tau,\ \psi)=(f_\tau,\ \psi),\quad \forall\psi\in H_0^r(\Omega); \\ (\varphi_\tau,\ \psi)=(g,\ \psi). \end{cases} \tag{39}
$$

其中 $a_\tau(\varphi_\tau,\ \psi)$ 表示相应于算子 A_τ 的双线性形式, 它是由 $(A_\tau\varphi_\tau,\ \psi)$ 经过广义的分部积分并考虑到边界条件后得来的, 它显然是 t 的函数. 问题(39)的解称为问题(35)在 Галеркин 意义下的广义解. 我们将用有限元法求问题(39)的近似解.

像前节一样,引入 $L+1$ 维空间 $S^{L+1}\subset H_0^r(\Omega)$,它的基函数为 $\{\psi_l\}_0^L$. 我们要求问题(39)具有下述形式的近似解(我们仍记作 φ_τ):

$$
\varphi_\tau(x,\ t)=\sum_{l=0}^{L}\overline{\varphi}_\tau^l(t)\psi_l(x), \tag{40}
$$

即求 φ_τ,使

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial\varphi_\tau}{\partial t},\ \psi_i\right)+a_\tau(\varphi_\tau,\ \psi_i)=(f_\tau,\ \psi_i),\ t\in(0,\ T);\\ (\varphi_\tau,\ \psi_i)=(g,\ \psi_i),\ \text{当}\ t=0\ \text{时}.\end{cases}\tag{41}$$

$$i=0,\ 1,\ \cdots,\ L.$$

由于 A_τ 具有(36)的形式，故在不同的时段

$$\left(t_j\pm\frac{k-1}{m}\tau,\ t_j\pm\frac{k}{m}\tau\right]$$

双线性形式 $a_\tau(\psi_l,\ \psi_i)$ 具有不同的形式，而且由于它与时间 t 有关，故我们记算子 $A_k(t)$ 相应的双线性形式为 $a_k^t(\varphi,\ \psi)$. 注意到(36)、(37)、(38)与(40)，则(41)变成

$$\begin{cases}\sum\limits_{l=0}^{L}\left[\dfrac{d\overline{\varphi}_\tau^l}{dt}(\psi_l,\ \psi_i)+m\overline{\varphi}_\tau^l a_k^t(\psi_l,\ \psi_i)\right]=0,\\ \qquad t\in\left(t_{j-1}+\dfrac{k-1}{m}\tau,\ \ t_{j-1}+\dfrac{k}{m}\tau\right],\\ \qquad k=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1;\\ \sum\limits_{l=0}^{L}\left[\dfrac{d\overline{\varphi}_\tau^l}{dt}(\psi_l,\ \psi_i)+m\overline{\varphi}_\tau^l a_m^t(\psi_l,\ \psi_i)\right]=m(f,\ \psi_i),\\ \qquad t\in\left(t_j-\dfrac{\tau}{m},\ \ t_j+\dfrac{\tau}{m}\right];\\ \sum\limits_{l=0}^{L}\left[\dfrac{d\overline{\varphi}_\tau^l}{dt}(\psi_l,\ \psi_i)+m\overline{\varphi}_\tau^l a_{m+1-k}^t(\psi_l,\ \psi_i)\right]=0,\\ \qquad t\in\left(t_j+\dfrac{k-1}{m}\tau,\ \ t_j+\dfrac{k}{m}\tau\right],\\ \qquad k=2,\ 3,\ \cdots,\ m;\\ \sum\limits_{l=0}^{L}\overline{\varphi}_\tau^l(0)(\psi_l,\ \psi_i)=(g,\ \psi_i),\\ \qquad i=0,\ 1,\ \cdots,\ L,\\ \qquad j=1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ M-1.\end{cases}\tag{42}$$

当 τ 充分小时，若以 $a_k^{t_j}(\psi_l,\ \psi_i)$ 代替 $a_k^t(\psi_l,\ \psi_i)$ 在时间 $t\in(t_{j-1},\ t_{j+1}]$ 之值；以

$$\left[\bar{\varphi}_{\tau}^{l}\left(t_s+\frac{k}{m}\tau\right)-\bar{\varphi}_{\tau}^{l}\left(t_s+\frac{k-1}{m}\tau\right)\right]\Big/\left(\frac{\tau}{m}\right)$$

代替 $\frac{\mathrm{d}\bar{\varphi}_{\tau}^{l}}{\mathrm{d}t}$ 在 $t\in\left(t_s+\frac{k-1}{m}\tau,\ t_s+\frac{k}{m}\tau\right]$ 之值 $(s=j-1$ 或 $s=j)$，以及 $\left[\bar{\varphi}_{\tau}^{l}\left(t_s+\frac{k-1}{m}\tau\right)+\bar{\varphi}_{\tau}^{l}\left(t_s+\frac{k}{m}\tau\right)\right]\Big/2$ 代替 $\bar{\varphi}_{\tau}^{l}$; 以 $f(t_j)$ 代替 f 在 $t\in\left(t_j-\frac{\tau}{m},\ t_j+\frac{\tau}{m}\right]$ 之值, 并采用记号

$$f^j=f(t_j),\ a_k^j(\psi_l,\ \psi_i)=a_k^{\prime j}(\psi_l,\ \psi_i),$$

$$\bar{\varphi}_l^{s+\frac{k}{m}}=\bar{\varphi}_{\tau}^{l}\left(t_s+\frac{k}{m}\tau\right),$$

则由(42)得到解问题(41)的 Галеркин 对称分裂格式:

$$\begin{cases}\sum_{l=0}^{L}\Big[\left(\bar{\varphi}_l^{j+\frac{k}{m}-1}-\bar{\varphi}_l^{j+\frac{k-1}{m}-1}\right)(\psi_l,\ \psi_i)\\ \quad+\frac{\tau}{2}\left(\bar{\varphi}_l^{j+\frac{k}{m}-1}+\bar{\varphi}_l^{j+\frac{k-1}{m}-1}\right)a_k^j(\psi_l,\ \psi_i)\Big]=0,\\ \qquad k=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1,\\ \sum_{l=0}^{L}\left[\left(\bar{\varphi}_l^{j}-\bar{\varphi}_l^{j-\frac{1}{m}}\right)(\psi_l,\ \psi_i)+\frac{\tau}{2}\left(\bar{\varphi}_l^{j}+\bar{\varphi}_l^{j-\frac{1}{m}}\right)a_m^j(\psi_l,\ \psi_i)\right]\\ \quad=\tau(f^j,\ \psi_i);\\ \sum_{l=0}^{L}\left[\left(\bar{\varphi}_l^{j+\frac{1}{m}}-\bar{\varphi}_l^{j}\right)(\psi_l,\ \psi_i)+\frac{\tau}{2}\left(\bar{\varphi}_l^{j+\frac{1}{m}}+\bar{\varphi}_l^{j}\right)a_m^j(\psi_l,\ \psi_i)\right]\\ \quad=\tau(f^j,\ \psi_i);\\ \sum_{l=0}^{L}\Big[\left(\bar{\varphi}_l^{j+\frac{k}{m}}-\bar{\varphi}_l^{j+\frac{k-1}{m}}\right)(\psi_l,\ \psi_i)+\frac{\tau}{2}\left(\bar{\varphi}_l^{j+\frac{k}{m}}+\bar{\varphi}_l^{j+\frac{k-1}{m}}\right)\\ \quad\cdot a_{m+1-k}^j(\psi_l,\ \psi_i)\Big]=0,\\ \qquad k=2,\ 3,\ \cdots,\ m;\\ \sum_{l=0}^{L}\bar{\varphi}_l^0(\psi_l,\ \psi_i)=(g,\ \psi_i).\\ \qquad i=0,\ 1,\ \cdots,\ L.\\ \qquad j=1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ M-1.\end{cases}\tag{43}$$

若记

$$K_k^j=\begin{bmatrix} a_k^j(\psi_0,\ \psi_0) & a_k^j(\psi_0,\ \psi_1) & \cdots & a_k^j(\psi_0,\ \psi_L) \\ a_k^j(\psi_1,\ \psi_0) & a_k^j(\psi_1,\ \psi_1) & \cdots & a_k^j(\psi_1,\ \psi_L) \\ & \cdots\cdots & & \\ a_k^j(\psi_L,\ \psi_0) & a_k^j(\psi_L,\ \psi_1) & \cdots & a_k^j(\psi_L,\ \psi_L) \end{bmatrix}^T, \tag{44}$$

$$F^j=[(f^j,\ \psi_0),\ (f^j,\ \psi_1),\ \cdots,\ (f^j,\ \psi_L)]^T,$$

$$\overline{A}_k^j=\Psi^{-1}K_k^j,\ \overline{F}^j=\Psi^{-1}F^j, \tag{45}$$

其中 Ψ 见(16). 则(43)可写成

$$\begin{cases} \left(I+\frac{\tau}{2}\overline{A}_k^j\right)\overline{\varphi}^{j+\frac{k}{m}-1}=\left(I-\frac{\tau}{2}\overline{A}_k^j\right)\overline{\varphi}^{j+\frac{k-1}{m}-1}, \\ \qquad k=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1, \\ \left(I+\frac{\tau}{2}\overline{A}_m^j\right)\overline{\varphi}^j=\left(I-\frac{\tau}{2}\overline{A}_m^j\right)\overline{\varphi}^{j-\frac{1}{m}}+\tau\overline{F}^j, \\ \left(I+\frac{\tau}{2}\overline{A}_m^j\right)\overline{\varphi}^{j+\frac{1}{m}}=\left(I-\frac{\tau}{2}\overline{A}_m^j\right)\overline{\varphi}^j+\tau\overline{F}^j, \\ \left(I+\frac{\tau}{2}\overline{A}_{m+1-k}^j\right)\overline{\varphi}^{j+\frac{k}{m}}=\left(I-\frac{\tau}{2}\overline{A}_{m+1-k}^j\right)\overline{\varphi}^{j+\frac{k-1}{m}}, \\ \qquad k=2,\ 3,\ \cdots,\ m, \\ \qquad j=1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ M-1, \\ \overline{\varphi}^0=\Psi^{-1}G. \end{cases} \tag{46}$$

若记

$$T_k(j)=\left(I+\frac{\tau}{2}\overline{A}_k^j\right)^{-1}\left(I-\frac{\tau}{2}\overline{A}_k^j\right),$$

$$B_m(j)=\left(I+\frac{\tau}{2}\overline{A}_m^j\right)^{-1},$$

$$T(j)=\prod_{k=1}^{m}T_k(j),$$

$$\overline{T}(j)=\prod_{k=m}^{1}T_k(j).$$

则从(46)中消去中间变量后得

$$
\begin{cases}
\bar{\varphi}^j=\bar{T}(j)\varphi^{j-1}+\tau B_m(j)\bar{F}^j, \\
\bar{\varphi}^{j+1}=T(j)\bar{\varphi}^j+\tau\prod_{k=1}^{m-1}T_k(j)B_m(j)\bar{F}^j, \\
\bar{\varphi}^0=\psi^{-1}G.
\end{cases}
\tag{47}
$$

定理 4.8 若 Ψ 对称正定，$K_k^j\geqslant0$，则对称分裂格式(43)绝对稳定.

证 由假设知 $\bar{A}_k^j\geqslant0$. 由引理 A 得 $\|B_m(j)\|\leqslant1$. 由 Kellogg 引理得 $\|T_k(j)\|\leqslant1$. 故得

$$
\|T(j)\|\leqslant\prod_{k=1}^{m}\|T_k(j)\|\leqslant1,
$$

$$
\|\bar{T}(j)\|\leqslant\prod_{k=1}^{m}\|T_k(j)\|\leqslant1.
$$

若记
$$
\|F\|=\max_j\|F^j\|,
$$

则
$$
\|\bar{F}^j\|\leqslant\|\Psi^{-1}\|\|F^j\|\leqslant\|\Psi^{-1}\|\|F\|.
$$

由(47)得

$$
\begin{aligned}
\|\bar{\varphi}^j\|&\leqslant\|\bar{T}(j)\|\|\bar{\varphi}^{j-1}\|+\tau\|B_m(j)\|\|\bar{F}^j\| \\
&\leqslant\|\bar{\varphi}^{j-1}\|+\tau\|\Psi^{-1}\|\|F\|,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|\bar{\varphi}^{j+1}\|&\leqslant\|T(j)\|\|\bar{\varphi}^j\|+\tau\prod_{k=1}^{m-1}\|T_k(j)\|\|B_m(j)\|\|\bar{F}^j\| \\
&\leqslant\|\bar{\varphi}^j\|+\tau\|\Psi^{-1}\|\|F\| \\
&\leqslant\|\bar{\varphi}^{j-1}\|+2\tau\|\Psi^{-1}\|\|F\|,
\end{aligned}
$$

故
$$
\|\bar{\varphi}^j\|\leqslant\|\bar{\varphi}^0\|+t\|\Psi^{-1}\|\|F\|,
$$

定理得证.

第二部分 区域分裂法

引 言

在前一部分里，我们介绍了算子分裂法，它可以把一个 n 维问题转化为 n'($n'=1, 2, \cdots, n-1$，依采用的技巧而定)维问题来求解，从而有益于克服解高维问题的许多困难．这一部分要介绍另一类型的分裂法——区域分裂法．它可以把一个定义在大的复杂区域上的问题转化为一些小的简单区域上的问题来迭代求解，从而能使许多数学物理问题的数值分析获得处理上的简化．更深远的意义还在于，它特别适合MIMD(Multiple-Instruction stream-Multiple-Data stream)计算机，可以作为建立一类解数学物理问题的异步并行算法的基础．

我们要介绍的区域分裂技术，在离散形式下将转化为一种形式自由的矩阵分裂．本书第5章叙述两种类型的矩阵分裂方法：通常的分块算法(即无重叠分裂)和带有重叠部分的分裂法．我们称后者为广义的矩阵分裂法．第6章以线性椭圆型偏微分方程边值问题为例研究了区域分裂法的一般理论，给出了方法的收敛性定理和误差估计定理．第7章讨论了某些非线性问题的区域分裂法．近年来，多层网格法(Multigrid method)在计算数学领域里引人注目．本书第8

章简要介绍了这一新的数值方法，并研究了它同区域分裂法的结合. 第9章讨论了 Schwarz 算法的收敛速度.

第 5 章

矩阵分裂法

§1 解线性代数方程组的分块松弛法

我们先从通常的分块松弛法讲起. 为解 n 阶线性代数方程组

$$AX=F, \tag{1}$$

对其系数矩阵 A, 未知向量 X 和右端 F 作如下形式的分块

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & & & \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix}, \tag{2}$$

其中 A_{jj} 为 $m_j\times m_j$ 阶方阵, X_j 与 F_j 均为 m_j 维向量, A_{jk} 为 $m_j\times m_k$ 阶矩阵,

$$\sum_{j=1}^{m} m_j=n.$$

设 A 为正定对称矩阵, 此时方程组 (1) 有唯一解 X^*.

解 (2) 的逐块松弛法可描述如下:

任给一初始猜测 $X^0=(X_1^0,\ X_2^0,\ \cdots,\ X_m^0)^T$, 作序列 $\{X^i\}_0^\infty$:

$$A_{jj}X_j^i=(1-\omega)A_{jj}X_j^{i-1}+\omega\left(F_j-\sum_{k=1}^{j-1}A_{jk}X_k^i-\sum_{k=j+1}^{m}A_{jk}X_k^{i-1}\right), \tag{3}$$

$$j \in \{1, 2, \cdots, m\},$$
$$i = 1, 2, \cdots,$$

其中 ω 为松弛因子.

很明显, 按(3)式松弛第 j 组分量一次, 需要解一个 m_j 阶线性代数方程组才能得到 X_j^i. 由于 A 正定, 故 A_{jj} 也正定, A_{jj}^{-1} 存在, 这方程组是唯一可解的.

为了方便下面的讨论, 我们先作一个略有别于(3)式的约定, 即每松弛一组分量, 便给 X^i 的上标 i 加 1. 记

$$F - AX^i = R^i = \begin{bmatrix} R_1^i \\ R_2^i \\ \vdots \\ R_m^i \end{bmatrix} \tag{4}$$

为残向量. 若 $X^i \neq X^*$, 则必 $R^i \neq 0$. (3)式所描述的方法本质上是逐块地调整近似解向量 X^i, 使残向量 R^i 逐渐变为零向量. 例如, 松弛第 j 组分量, 就是对 X^i 作如下调整:

$$X^{i+1} = X^i + \omega \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_{jj}^{-1} R_j^i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

很明显, 这种调整只有当 $R_j^i \neq 0$ 时才有必要, 因而不必按照某种规定的顺序循环执行.

为方便计, 令

$$\omega\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ A_{jj}^{-1}R_j^i\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}=\omega\alpha_j,$$

则(5)式可写为

$$X^{i+1}=X^i+\omega\alpha_j. \tag{5'}$$

当 $\omega=1$ 时，则有 $R_j^{i+1}=0$，否则 $R_j^{i+1}=(1-\omega)R_j^i$.

若记

$$Y^i=X^*-X^i,\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots, \tag{6}$$

则有

$$AY^i=R^i,\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots. \tag{7}$$

因 A 正定，故泛函

$$J(Y^i)=(AY^i,\ Y^i)\geqslant 0,\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots, \tag{8}$$

且只有当 $Y^i\equiv 0$ 时，即 $X^*=X^i$ 时，才有 $J(Y^i)=0$.

由(5)、(7)两式可得

$$Y^{i+1}=X^*-X^{i+1}=X^*-(X^i+\omega\alpha_j)=Y^i-\omega\alpha_j,$$

$$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

由此便可推出

$$\begin{aligned}J(Y^{i+1})&=(AY^{i+1},\ Y^{i+1})\\ &=(A(Y^i-\omega\alpha_j),\ Y^i-\omega\alpha_j)\\ &=J(Y^i)-2\omega(\alpha_j,\ R^i)+\omega^2(A\alpha_j,\ \alpha_j)\\ &=J(Y^i)-2\omega(A_{jj}^{-1}R_j^i,\ R_j^i)+\omega^2(R_j^i,\ A_{jj}^{-1}R_j^i)\\ &=J(Y^i)-\omega(2-\omega)(A_{jj}^{-1}R_j^i,\ R_j^i).\end{aligned} \tag{9}$$

因 A_{jj}^{-1} 正定，故 $(A_{jj}^{-1}R_j^i,\ R_j^i)\geqslant 0$，当且仅当 $R_j^i\equiv 0$ 时才取等号. 所以，只要 $0<\omega<2$，就有

$$J(Y^{i+1})<J(Y^i), \quad i=0, 1, 2, \cdots.$$

这说明，当 $0<\omega<2$ 时，只要我们在第 $i+1$ 次对相应于 $R_j^i\neq 0$ 的那组方程(第 j 组方程)作上述方式的调整，得到的近似解序列 $\{X^i\}_0^\infty$ 便可使泛函序列 $\{J(Y^i)\}_0^\infty$ 成为一个严格单调下降的数列. 由 (8) 式知道这个数列的下确界为零，故其收敛，且 $\lim\limits_{i\to\infty} J(Y^i)=0$. 相应地必有 $\lim\limits_{i\to\infty} X^i=X^*$. 若不然，即设 $\lim\limits_{i\to\infty} J(Y^i)=J(\overline{Y})=0$, 但相应的 $\lim\limits_{i\to\infty} X^i=\overline{X}\neq X^*$, 那么就有 $F-A\overline{X}=\overline{R}\neq 0$, 这表明还可用 $\overline{X}$ 作为初值按前面所述的方式继续调整下去，而且总有

$$J(\overline{Y}^{i+1})<J(\overline{Y}^i)<J(\overline{Y}), \quad i=1, 2, \cdots.$$

联系到(8)式，知这与 $J(\overline{Y})=0$ 的假设矛盾.

因此，我们得如下定理:

定理 5.1 若 A 为对称正定矩阵，则当 $0<\omega<2$ 时，逐块松弛法(3)收敛，即序列 $\{X^i\}_0^\infty\to X^*$.

其中 ω 为松弛因子.

定义 1 上述逐块松弛法称为

(1) 完全松弛法　若 $\omega=1$;

(2) 低松弛法　　若 $0<\omega<1$; ⎫
(3) 超松弛法　　若 $1<\omega<2$. ⎭ 不完全松弛法

如果松弛是按某种次序循环下去，例如，按照 $j=1, 2, \cdots, m; 1, 2, \cdots, m; \cdots$ 的顺序循环下去，则称为系统松弛法. 当 $\omega\in(0, 2)$时，系统松弛法是收敛的. 当 $\omega=1$ 时，就是块 Seidel 迭代法. 按定义 1 它是一种系统的完全松弛法.

若第 i 步调整第 j 组分量得到的近似解向量记为 $X^{i(j)}$, 我们要问: $i(j)$满足什么条件才会使 $\{X^{i(j)}\}_0^\infty$ 收敛最快? R. V. Southwell 型[21]的调整方案是: 若第 i 步有

$$\max_{1\leqslant k\leqslant m} \|R_k^i\| = \|R_j^i\|,$$

则这一步就调整第 j 组分量，但由(9)看到，如果要使 $J(Y)$ 下降最快，则要采用下述方式：

若 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant m} (A_{kk}^{-1}R_k^i,\ R_k^i) = (A_{jj}^{-1}R_j^i,\ R_j^i)$，则这一步就调整第 j 组分量，从而得到 X^{i+1}. Southwell 型的逐块松弛法可描述如下：

任给一初始猜测 X^0，作序列 $\{X^i\}_0^\infty$

1) $R^{i-1} = F - AX^{i-1}$;

2) 若 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant m} (A_{kk}^{-1}R_k^{i-1},\ R_k^{i-1}) = (A_{jj}^{-1}R_j^{i-1},\ R_j^{i-1})$ 则作调整 $X^i = X^{i-1} + \alpha_j$;

3) 若 $\|X^i - X^{i-1}\| > \varepsilon$ 则转 1) 否则过程终止，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ j\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ m\}$.

其中 ε 是所求解的容许误差.

需要指出的是，上述调整方案只不过是在"走一步，看一步"的策略意义下的最佳方案. 从有益于全局(计算程序的自动化、减少信息量和形成信息的运算量等等，从而最终加快运算速度)的意义上讲，在串行计算机上 D. Young 的 BSOR 算法是一个更高明的调整策略. BSOR 算法是一种系统的逐块超松弛法，而 Southwell 型的松弛法则是一种非系统的逐块超松弛法. 根据前面的论述，它们都是收敛的. 系统的逐块超松弛法 BSOR 法是解椭圆型偏差分方程和有限元方程的常用算法.

若解每一子方程组也用松弛法，则形成"嵌套"的松弛过程. 我们称子方程内的循环松弛过程为内循环，而把前面所述的块松弛过程叫做外循环. 在嵌套的情况下，我们一般采用固定内循环次数的松弛方式：

§2 广义的矩阵分裂法

值得注意的是，前述的块松弛法，每子块的阶数是任意的. 我们现在要拓广这种任意性，即允许各子块之间具有重叠部分. 为清楚起见，我们先以一个简单的例子进行说明，然后再过渡到一般论述.

考虑线性代数方程组

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

这里仍假设系数矩阵是对称正定的. 现对它作如下形式的分块:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}, \tag{11}$$

其中

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{14} & a_{15} \\ a_{24} & a_{25} \\ a_{34} & a_{35} \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \\ a_{51} & a_{52} \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix},$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad F_1 = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix}.$$

A_{11}与A_{22}之间的重叠元素是a_{33}，X_1与X_2之间的重叠元素是x_3，F_1与F_2之间的重叠元素是f_3. 显然，A_{11}与A_{22}都是正定对称的.

相应于两个子块的残向量

$$R_1=\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}, \qquad R_2=\begin{bmatrix} r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{bmatrix}$$

之间也具有重叠元素r_3. 其中$r_j(j=1, 2, 3, 4, 5)$为对应于方程组(10)中每个方程的残向量.

除了象上面这样将方程组(10)分裂为(3,3)阶的情形外，还可以将它分裂为(4, 3)、(3, 4)、(4, 2)、(2, 4)阶等情形. 而且上面的分裂只是将方程组(10)分裂为两组的情形，也可以将它分裂为三组、四组，比如(2, 2, 3)、(2, 2, 2, 2)等.

下面我们进一步研究(11)的解法. 因为A_{11}、A_{22}正定，所以A_{11}^{-1}、A_{22}^{-2}存在且正定，我们对(11)采用下述交替松弛法:

任给初始猜测$X^0=(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, x_5^0)^T$，作序列$\{X^i\}_0^\infty$:

$$\begin{cases} X^{2i+1}=X^{2i}+\omega\begin{bmatrix} A_{11}^{-1}R_1^{2i} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ X^{2i+2}=X^{2i+1}+\omega\begin{bmatrix} 0 \\ A_{22}^{-1}R_2^{2i+1} \end{bmatrix}, \end{cases} \tag{12}$$

$$i=0, 1, 2, \cdots.$$

实际上，上述过程是一个系统的块松弛过程，所不同之处是x_3每次都被松弛了.

一般地，对方程组(1)作如下形式的分裂:

$$
\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & & & \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix}, \tag{13}
$$

其中每个对角块 $A_{jj}(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$都可能与相邻对角块有重叠部分，$A_{jj}$ 是 m_j 阶方阵，X_j 与 F_j 是 m_j 维向量．自然，$\sum_{j=1}^{m} m_j \geqslant n$．我们还设第 j 个对角块与第 $j+1$ 个对角块重叠部分的阶数为 l_j．

现在来描述解方程组(1)的有重叠分块松弛过程：

任给初始猜测 $X^0=(X_1^0,\ X_2^0,\ \cdots,\ X_m^0)^T=(x_1^0,\ x_2^0,\ \cdots,\ x_n^0)^T$，作序列 $\{X^i\}_0^\infty$，

$$
\begin{aligned}
A_{jj}X_j^i = (1-\omega)A_{jj}X_j^{i-1} & \\
+\omega\left(F_j-\sum_{k=1}^{j-1} A_{jk}\widetilde{X}_k^i-\sum_{k=j+1}^{m} A_{jk}\widetilde{X}_k^{i-1}\right), & \qquad (14) \\
j=1,\ 2,\ \cdots,\ m, & \\
i=1,\ 2,\ \cdots. &
\end{aligned}
$$

这里 $A_{jk}(j\neq k)$为 $m_j\times s_k$ 矩阵，

$$
s_k=\begin{cases} m_k-l_k, & k<j; \\ m_k-l_{k-1}, & k>j. \end{cases}
$$

$\widetilde{X}_k$ 为 X_k 的前(若 $k<j$)或后(若 $k>j$)s_k 个分量组成的向量．显然，若全无重叠，则 $l_j=0(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1)$．此时(14)式即是(3)式，有重叠分块便退化成前一节的无重叠分块情形．记残向量

$$
R^i=(R_1^i,\ R_2^i,\ \cdots,\ R_m^i)^T=F-AX^i, \tag{15}
$$

其中 $R_j^i(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$为对应于(14)给出的子方程组的残向量，毫无疑问，这些子残向量相互也具有重叠部分．

若 $R^i\neq 0$，则必有某个子残向量不为 0，比如说 $R^i_j\neq 0$，由 A_{jj} 正定，可知 A_{jj}^{-1} 存在且正定，因此我们可作调整(每松弛一组分量，使给 X^i 的上标 i 加 1)：

$$X^{i+1}=X^i+\omega\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ A_{jj}^{-1}R^i_j\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix},\tag{16}$$

$$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

如此调整下去，就可得到序列 $\{X^i\}_0^\infty$.

定义 2 我们称上述这种基于有重叠分块的逐块松弛算法为广义的矩阵分裂法，简称为 B—算法，相应的序列 $\{X^i\}_0^\infty$ 称为 B—序列.

完全类似定理 5.1 的证明，我们有如下定理：

定理 5.2 若 A 为对称正定矩阵，则当 $0<\omega<2$ 时，B—算法收敛，即 B—序列 $\{X^i\}_0^\infty\to X^*$.

其中 ω 为松弛因子.

定义 3 上述 B—算法称为

(1) 完全松弛法　若 $\omega=1$；

(2) 低松弛法　　若 $0<\omega<1$；⎫

(3) 超松弛法　　若 $1<\omega<2$. ⎭不完全松弛法

如果松弛是按一定的顺序，例如按 $j=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ \cdots$ 的顺序循环下去，则称为系统 B—算法. 当 $\omega=1$ 时，就是有重叠分块的 Seidel 迭代法，按定义 2 它是一种系统的完全 B—算法.

一般说来，子块重叠部分越多，每松弛一次计算量就越大，但收敛速度越快，反之，子块重叠部分越少，每松弛一次计算量就越少，但收敛速度越慢．怎样分裂才是最优的，这是一个值得进一步研究的问题，它显然与矩阵 A 的性质有关．

由于子方程组阶数较低，故往往比较容易求解，这就使得 B—算法在计算机内存较小时也较为有效．

为了说明无重叠的逐块松弛法与 B—算法之间的区别，我们现在计算一个简单的例子：

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{17}$$

显然 A 对称正定．其精确解为 $x_1=x_2=x_3=1$．

（一）无重叠的逐块松弛法

若将(17)分裂为

$$\left[\begin{array}{c|cc} 2 & -1 & 0 \\ \hline -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \\ x_3 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \\ 1 \end{array}\right],$$

任给初始猜测 $X^0=(0,\ 0,\ 0)^T$，取 $\omega=1$，作序列 $\{X^i\}_0^\infty$：

$$x_1^{2i+1}=\frac{1}{2}(1+x_2^{2i}),$$

$$\begin{bmatrix} x_2^{2i+2} \\ x_3^{2i+2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} x_1^{2i+1} \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$i=0,\ 1,\ 2\cdots.$$

$\{X^i\}_0^\infty$ 的前 k 个近似解向量为：

表 5.1

i	1	2	3	4	5	6	…	k
x_1^{2i+1}	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	17/18	53/54	161/162	485/486		$1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^{k-1}}$
x_2^{2i+2}	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{9}$	26/27	80/81	242/243	728/729		$1-\frac{1}{3^k}$
x_3^{2i+2}	$\frac{5}{6}$	$\frac{17}{18}$	53/54	161/162	485/486	1457/1458		$1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^k}$

显然最佳松弛因子 $\omega_{opt}=1.5$.

(二)B--算法

若将(17)分裂为

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix},$$

其中

$$A_{11}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{与 } A_{22}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\text{具有重叠元素 } 2;$$

$$A_{12}=\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, A_{21}=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$ A_{12} 与 A_{22} 有重叠元素 -1,

A_{21} 与 A_{11} 有重叠元素 -1.

$$X_1=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\text{与 } X_2=\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\text{具有重叠元素 } x_2;$$

$$F_1=\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}\text{与 } F_2=\begin{bmatrix} f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}\text{具有重叠元素 } f_2.$$

任给初始猜测 $X^0=(0,\ 0,\ 0)^T$，取 $\omega=1$，作序列 $\{X^i\}_0^\infty$:

$$\begin{cases} X^{2i+1}=X^{2i}+\omega\begin{bmatrix} A_{11}^{-1}R_1^{2i} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ X^{2i+2}=X^{2i+1}+\omega\begin{bmatrix} 0 \\ A_{22}^{-1}R_2^{2i+1} \end{bmatrix}, \end{cases}$$

$$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots.$$

化简上式得松弛公式:

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}x_1^{2i+1}\\ x_2^{2i+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ x_3^{2i}\end{bmatrix},\\ \begin{bmatrix}x_2^{2i+2}\\ x_3^{2i+2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}x_1^{2i+1}\\ 1\end{bmatrix},\end{cases}$$

$$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

$\{X^i\}_0^\infty$ 的前 k 个近似解向量为:

表 5.2

i	1	2	3	4	…	k
x_1^{2i+1}	$\frac{2}{3}$	$\frac{26}{27}$	$\frac{242}{243}$	$\frac{2186}{2187}$	…	$1-\frac{1}{3^{2k+1}}$
x_2^{2i+2}	$\frac{7}{9}$	$\frac{79}{81}$	$\frac{727}{729}$	$\frac{6559}{6561}$	…	$1-2\cdot\frac{1}{3^{2k}}$
x_3^{2i+3}	$\frac{8}{9}$	$\frac{80}{81}$	$\frac{728}{729}$	$\frac{6560}{6561}$	…	$1-\frac{1}{3^{2k}}$

最佳松弛因子 $\omega_{opt}=1.125$.

比较上述两个结果可知,当 $\omega=1$ 时, B-Seidel 方法比通常的块 Seidel 方法收敛速度刚好快一倍. 即通常的块 Seidel 方法只有一阶敛速, 而 B-Seidel 方法具有二阶敛速. 当取 $1<\omega<2$ 时亦有类似结果.

广义的矩阵分裂法即带有重叠部分的分块迭代法的早期研究可参看 Ostrowski 的文献[19]. 应当指出, 本节讨论的广义矩阵分裂仍未包括非常一般的情形. 读完下一章后读者将会看到,由于区域分裂导致的矩阵分裂,要比本节讨论的分裂方式自由和复杂得多.

§3 广义的矩阵分裂混乱松弛法

在§1我们已经讨论了非系统的逐块松弛方法，现在我们来对这一方法进行深入的讨论，从而引出一类新的方法——混乱松弛法.

若对方程组(2)作非系统的松弛运算

$$X^{i(j)}=X^{i-1(j)}+\omega\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ A_{jj}^{-1}R_j^{i-1}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix},$$

$$\forall j\in M=\{1,\ 2,\ \cdots,\ m\},$$

$$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,$$

得到序列 $\{X^{i(j)}\}_0^\infty$. 上述格式未对子块的松弛次序作任何约定，其中的标号 $i(j)$ 仅表示近似解 $X^{i(j)}$ 是由第 i 步松弛第 j 个子块而得到的. 这样一来，每一松弛过程都可唯一地与某个由松弛次数 i 和松弛块号 j 确定的序列 $\{i(j)\}_0^\infty$ 成一对一的映照.

我们把标号序列 $\{i(j)\}_0^\infty$ 分成 m 个子序列

$$\{i_1(1)\},\ \{i_2(2)\},\ \cdots,\ \{i_m(m)\}.$$

它们与近似解子序列

$$\{X^{i_1(1)}\},\ \{X^{i_2(2)}\},\ \cdots,\ \{X^{i_m(m)}\}$$

是一一对应的.

一般说来，如果我们不对 $i(j)$ 作任何限制，则当 $i\to\infty$

时，上述m个标号子序列中有的可能是无限集，有的可能是有限集，有的甚至可能是空集，但至少有一个是无限集，即标号$i_1(1)$，$i_2(2)$，…，$i_m(m)$中至少有一个趋向无穷大．换言之，如果不对松弛次序作任何限制，那么当松弛运算无限次地继续下去时，有的子块可能被无限次地松弛，有的可能只松弛有限次，有的甚至可能一次也轮不到，但至少有一个子块被无限次地松弛．

定义 4 称逐块松弛法为逐块混乱松弛法（简称 **CR** 算法（chaotic relaxation）），如果当$i\to\infty$时有

$$i_j(i)\to\infty,\ \forall j\in M.$$

相应地，称一个CR算法为：

(1) 混乱完全松弛法　CCR　若$\omega=1$；

(2) 混乱低松弛法　CUR　若$0<\omega<1$；

(3) 混乱超松弛法　COR　若$1<\omega<2$．

关于混乱松弛法的定义很多，也有称为异步迭代法的．这些方法已被用于求解非线性方程组．有关这方面的内容可参看文献[50]～[53]．最近，M. N. El Tarazi 在他的博士论文[54]里对这类算法给了一个较全面的总结，并且提供了一个系统的参考文献目录．

下面我们研究 CR 算法的收敛性，先给出如下定理：

定理 5.3 若A为对称正定矩阵，则当$0<\omega<2$时，CR 算法收敛，即序列$\{X^{i(j)}\}_0^\infty$收敛到X^*．

证明 根据定义 4，当$i\to\infty$时，对于$X^{i(j)}$的每一分量$X^{i_j(j)}(j=1,2,\cdots m)$，松弛的标号$i_j(j)$都趋向无穷大，因此

$$\lim_{i\to\infty}J(Y^{i(j)})=J(0).$$

此时必有
$$X^{i(j)}\to X^*.$$

若 $$\lim_{i\to\infty} J(Y^{i(j)})=J(\overline{Y})\neq J(0),$$

则有 $$\overline{X}\neq X^*.$$

那么残向量 $\overline{R}=F-A\overline{X}$ 至少存在一分量 $\overline{R}_j\neq 0$, 但因 $i_i\to\infty$, 故此时必在相应于 $\overline{R}_j$ 的某个 i_j 处尚可作调整

$$\overline{X}^{i_j(j)}=\overline{X}+\omega\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ A_{jj}^{-1}\overline{R}_j\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix},$$

使得 $$J(Y^{i_j(j)})<J(\overline{Y}).$$

另一方面,我们又有

$$J(\overline{Y})<J(Y^{i(j)}),$$

因为 $X^{i_j(j)}\in\{X^{i(j)}\}_0^\infty$, 自然也成立

$$J(\overline{Y})<J(Y^{i_j(j)}),$$

由此得出矛盾. 故可断言

$$\lim_{i\to\infty} J(Y^{i(j)})=0.$$

定理证毕.

上面我们讨论的是无重叠矩阵分裂情形的混乱松弛法. 非常自然地就可把这一讨论引入有重叠的矩阵分裂的情形中去.

若对方程组(13)执行非系统的 B-算法, 并记其近似解序列为 $\{X^{i(j)}\}_0^\infty$ (第 i 步松弛第 j 组分量), 也将 $\{X^{i(j)}\}_0^\infty$ 分成 m 个子序列:

$$\{X^{i_1(1)}\},\ \{X^{i_2(2)}\},\ \cdots,\ \{X^{i_m(m)}\}.$$

定义5　称B–一算法为广义矩阵分裂混乱松弛法B-CR算法，如果当$i\to\infty$时，有

$$i_j(j)\to\infty,\ \forall j\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ m\}.$$

同样可证明如下收敛性定理：

定理5.4　若A为对称正定矩阵，则当$0<\omega<2$时，B-CR算法收敛，即序列$X^{i(j)}\to X^*$.

类似地，称一个B-CR算法为：

(1) 混乱完全松弛B-算法(B-CCR)，若$\omega=1$;

(2) 混乱低松弛B-算法(B-CUR)，若$0<\omega<1$;

(3) 混乱超松弛B-算法(B-COR)，若$1<\omega<2$.

值得指出的是，B-CR算法是概括性很广的一类算法．由于三个任意性：分裂方式的任意性(可重叠也可无重叠)、松弛因子选择的任意性(既可固定，也可在(0, 2)范围内随着迭代次数i的变化而变化)、松弛顺序的任意性，从而，现有的解具有正定对称系数矩阵的线性代数方程组的各种迭代法，几乎都可视为其特例．

B-CR算法既然具有上述的三个任意性，那么怎样的分裂方式是最佳分裂？怎样的松弛顺序是最佳顺序？怎样的松弛因子是最佳因子？要一般地回答这些问题是困难的，这还要看使用怎样的计算工具，是串行机还是并行机，是同步并行还是异步并行，不同的计算工具与不同的要求，“最佳”的标准(或者说品质)也是不同的，但B-CR算法提供了各种优化的可能性．

作为本节的例子，我们根据B-CR算法设计一个解方程组(1)的混乱松弛程序．

设将(1)分裂成m个互相重叠的子块，每一子块由一台处理机(进程)来求解．整体变量定义为

$$\begin{cases} X=(X_1, X_2, \cdots, X_m); \\ Eps=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m); \\ E. \end{cases}$$

X_j 与 ε_j 由第 j 台处理机 $P_j(j=1, 2, \cdots, m)$ 负责更新数据，E 指定由 P_m 负责更新数据. E 的初值可置1(不得为零)，其余整体变量的初值可全置零.

process $P_j(j=1, 2, \cdots, m)$;

begin

L: **if** $E>\varepsilon$ **then**

begin

$\omega * A_{jj}^{-1}\left(F_j-\sum\limits_{k=1}^{j-1} A_{jk}X_k-\sum\limits_{k=j+1}^{m} A_{jk}X_k\right)\to T_j$;

$\|T_j\|\to\varepsilon_j$;

$(1-\omega)X_j+T_j\to X_j$;

$(\|eps\|\to E,\ \text{if}=m)$

goto L

end

stop

end

m 个进程 $P_j(j=1, 2, \cdots, m)$ 异步并行运行，各进程的运行速度可以不同，因而松弛过程是混乱的，但定理 5.3 保证了它们的收敛性.

§4 两个简单的数学物理问题

本节叙述两个简单的数学物理问题的松弛解法. 它们的离散化数值模拟即导致前述有重叠部分的矩阵分裂. 它们可

以作为前面介绍过的松弛法与混乱松弛法的物理解释，同时也是后续讨论的引导.

第一例子，我们考虑弦的平衡问题.

在选定的坐标系里，考察一根两端固定、跨度为 l，自重可以忽略不计的均匀理想弹性弦(如图 5.1).

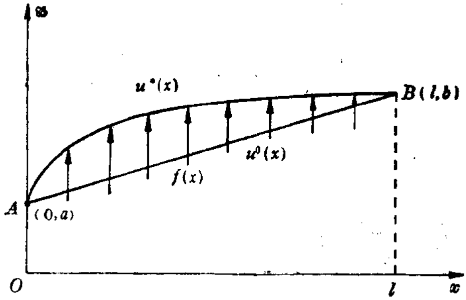


图 5.1

设弦的张力为 T，具有强度为 $f(x)$ 垂直于 x 轴的外力作用于弦上，使弦产生位移 $u(x)$，并在 $u^*(x)$ 处达到平衡状态. 又设在没有外力作用时($f=0$)弦的平衡位置为

$$u^0(x)=\frac{b-a}{l}x+a.$$

于是弦的真实位移为

$$u(x)=u^*(x)-u^0(x).$$

"最小势能原理"阐明，一受外力作用的弹性体，在满足边界约束的一切可能的位移中，达到平衡状态的位移(即真实的位移)使总势能最小.

现在考虑小变形问题. 由弹性力学的理论可知

总势能(W)=应变能($W_内$)-外力作功($W_外$).

其中
$$W_内=\frac{1}{2}\int_0^l T\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x,$$

$$W_{外}=\int_0^l fu\,\mathrm{d}x.$$

故得
$$W=\frac{1}{2}\int_0^l T\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x-\int_0^l fu\,\mathrm{d}x.$$

由此可见，总势能 W 是位移函数 $u(x)$ 的泛函，通常记作

$$\begin{aligned}J(u)&=\frac{1}{2}\left(T\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)-(f,\ u)\\&=\frac{1}{2}\int_0^l T\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x-\int_0^l fu\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

所谓"满足边界约束的一切可能的位移"就是这样的函数类：

$$H_0^1(0,\ l)=\left\{v\,\middle|\,v\in L_2(0,\ l),\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\in L_2(0,\ l),\ v(0)=v(l)=0\right\}.$$

最小势能原理的数学形式是：

求变分问题

$$\inf_{v\in H_0^1} J(v) \tag{18}$$

的解 $u(x)$.

下面给出这一问题的"虚功原理"的数学描述.

记
$$a(u,\ v)=\left(T\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right),$$
$$F(v)=(f,\ v).$$

显然，$a(u,\ v)$ 关于 u 与 v 都线性的，$F(v)$ 是关于 v 的线性泛函. 函数类 $H_0^1(0,\ l)$ 中的任何元素 v 均可视为该弦的"虚位移"，因而 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ 是"虚应变". 虚功原理的数学形式是：

求 $u\in H_0^1(0,\ l)$ 使得

$$a(u,\ v)=F(v),\ \forall v\in H_0^1(0,\ l). \tag{19}$$

可以证明，问题(18)与问题(19)是等价的，即最小势能原理与虚功原理是等价的．事实上，对于任何$v\in H_0^1(0, l)$及任意实数t，均有$u+tv\in H_0^1(0, l)$．由(18)可知

$$J(u+tv)\geqslant J(u).$$

而

$$J(u+tv)=J(u)+t[a(u, v)-(f, v)]+\frac{t^2}{2}a(v, v).$$

由于 $$a(v, v)\geqslant 0, \quad \forall v\in H_0^1(0, l).$$

要使不等式 $$J(u+tv)\geqslant J(u), \quad \forall t\in \boldsymbol{R}$$

成立，充分必要条件是u为问题(19)的解．

如果$u(x)$具有更好的光滑性，例如，$u\in C^2(0, l)\cap C_0^1[0, l]$，则对任何$v^*\in C_0^1[0, l]$，显然$v^*\in H_0^1(0, l)$，均有

$$\begin{aligned}
&\int_0^l T\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x-\int_0^l fv^*\mathrm{d}x\\
&=\int_0^l T\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}v^*-\int_0^l fv^*\mathrm{d}x\\
&=\left[T\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}v^*\right]_0^l-\int_0^l\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(T\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)v^*\mathrm{d}x-\int_0^l fv^*\mathrm{d}x\\
&=-\int_0^l\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(T\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)+f\right]v^*\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

由此可知，若u是两点边值问题

$$\begin{cases}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(T\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)=f\\ u(0)=u(l)=0\end{cases}\tag{20}$$

的解，则它一定是问题(18)与问题(19)的解．反之，若u是问题(18)或问题(19)的解，又$u\in C^2(0, l)\cap C_0^1[0,l]$，则它也是问题(20)的解．

综上所述，若弦的平衡状态曲线$u^*(x)$充分光滑，则此物理问题可以用上述(18)、(19)、(20)中的任何一种数学形式来

描述．如果作用于弦上的外力是集中荷载，那么$u(x)$不仅没有二阶导数，甚至在某些点上连通常的一阶导数也不存在，这时问题已不可能用微分方程(20)的形式来描述了，而必须化成问题(18)或(19)来求解．

为了对松弛法的物理意义作较为直观的解释；也为了对后面展开对区域分裂、局部拟边界、拟边界松弛等一系列新概念的导出给出一个最初的示例；更重要的是：清楚的物理背景从来就是数学理论与方法的正确性的有力佐证．故下面就从物理实验的角度来描述解问题(18)的松弛法．

为简化起见，令$f(x)=0$，于是弦的总势能就是应变能

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_0^l T\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x.$$

由弹性力学的常识可知，此时弦的真实位移$u(x)=0$，即弦位于过点A、B的直线

$$u^*(x)=\frac{b-a}{l}x+a$$

上．而"满足边界约束的一切可能的位移"就是过点A、B使$J(v)<+\infty$的一切曲线$v(x)$，即函数类

$$H_\varphi^1(0,\ l)=\{v\,|\,J(v)<+\infty,\ v(0)=a,\ v(l)=b\}.$$

在区间$(0,\ l)$内任取两点C与D，设$C<D$，它们把区间$[0,\ l]$分成两个有重叠部分的子区间$[0,\ D]$与$[C,\ l]$．我们称D和C分别为子区间$[0,\ D]$和$[C,\ l]$的拟边界点．记张拉在这两个子区间上的部分弦的总势能分别为J_1和J_2．解此问题的松弛过程描述如下(参看图5.2)：

(1) 任给$u^0(x)\in H_\varphi^1(0,\ l)$；

(2) 得$u^0(D)=u_D^0$和点$D^0(D,\ u_D^0)$；

(3) 从过点A、D^0的一切可能的位移中求$\tilde{u}^1(x)$使

$$\inf J_1(v)=J_1(\tilde{u}^1),$$

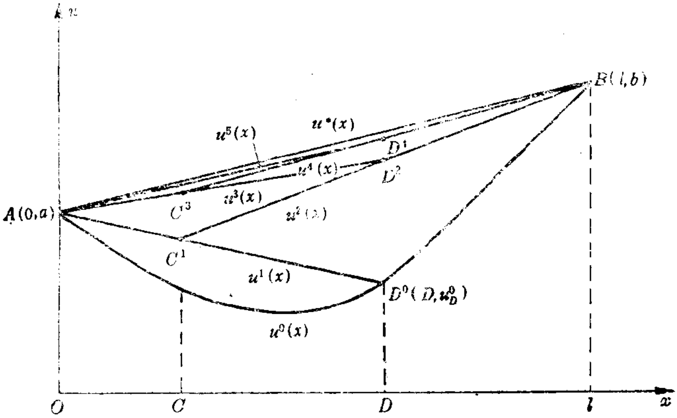


图 5.2

其中
$$J_1(v)=\frac{1}{2}\int_0^D T\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx.$$

一切可能的位移即函数类

$$K_0(D)=\{v\,|\,v\in H_0^1(0,\ l),\ v(D)=u_D^0\}.$$

显然它就是过点 A、D^0 的直线

$$\tilde{u}^1(x)=\frac{u_D^0-a}{\overline{OD}}x+a.$$

此时弦的位置是

$$u^1(x)=\{v\,|\inf_{v\in k_0(D)}J_1(v)=J_1(\tilde{u}^1)\text{于}(0,\ D)\text{内},$$
$$v=u^0\text{于}[D,\ l)\text{上}\}$$

(4) 得 $u^1(C)=u_C^1$ 和点 $C^1(C,\ u_C^1)$;

(5) 从过点 C^1、B 的一切可能的位移中求 $\tilde{u}^2$ 使

$$\inf J_2(v)=J_2(\tilde{u}^2).$$

其中
$$J_2(v)=\frac{1}{2}\int_C^l T\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx,$$

一切可能的位移即函数类

$$k_1(C)=\{v\mid v\in H_\varphi^1(0,\ l),\ v(C)=u_C^1\}.$$

显然它就是过点 C^1、B 的直线

$$\tilde{u}^2(x)=\frac{b-u_C^1}{Cl}x+u_C^1.$$

此时弦的位置是

$$u^2(x)=\{v\mid \inf_{v\in k_1(C)} J_2(v)=J_2(\tilde{u}^2)\text{于}(C,\ l)\text{内},$$

$$v=u^1\text{于}(0,\ C]\text{上}\}.$$

重复(2)～(5)，直到 $u^i(x)$ 几乎不随重复次数 i 的增加而有什么变化，就得到问题(18)的解．从图 2 可见，$u^5(x)$就很接近问题的解 $u^*(x)$了．

上述过程的基本点在于把求区域 $[0,\ l]$ 上弦的平衡问题化成了两个较小的区域$[0,\ D]$与$[C,\ l]$上一系列的弦的平衡问题．这种把大问题化成小问题的调整过程的思想方法常为工程技术人员在解算实际问题时所采用．虽然我们这里已把问题简化得一目了然，甚至使调整过程也显得是多余的，但只要仔细分析这一过程，便会得到一些更重要的启发．

为了更直观地解释方法的物理背景，我们撇开问题的数学形式而用弹性力学的实验方式把上述松弛过程重复一遍：

取一条细橡皮筋，将其两端固定在 A、B 处．由于它很细，所以可忽略它的自重，认为它已被自然地张拉成一段直线了，这就是它的平衡位置 u^*(见图 5.2)．如果把这条橡皮筋拉到点 D^0 处并用钉子予以固定，它就变成了过点 A、D^0、B 的一段折线，这时它在 $[A,\ D^0]$ 上所处的位置恰好重合于前述第一次松弛后得到的位移函数 $\tilde{u}^1(x)$．我们再在点 C^1 处用钉子把橡皮筋固定(显然，这时即使拔掉这颗钉子，橡皮筋也不会移动，这就是说，C^1 处的这颗钉子目前对它不起约束作用)．接着拔掉点 D^0 处的钉子，即解除橡皮筋在点 D^0 处

所受的约束，使橡皮筋在拟边界点 D 因而也在子区间 (C, l) 上获得一次松弛，于是橡皮筋便弹跳到一个新的平衡位置，形成过点 A、C^1、B 的折线，此即位移函数 $u^2(x)$，这时点 C^1 处的钉子就构成对橡皮筋的约束了．继而又在点 D^2 处加钉子，它暂时对橡皮筋不起约束作用，但当拔掉点 C^1 处的钉子，解除橡皮筋在该点的约束之后，橡皮筋在拟边界点 C 因而也在子区间 $(0, D)$ 上获得一次松弛，它便弹跳到一个新的平衡位置，形成过点 A、D^2、B 的折线，即 $u^3(x)$，这时 D^2 处的钉子就构成对橡皮筋的新的约束了．如此加钉、拔钉交替地进行下去，直到 C、D 上方两处的钉子都显示不出对橡皮筋的约束作用时，橡皮筋就回到它原来的平衡位置，即 $u^*(x)$．

每当我们解除一次约束(拔掉一颗钉子)，橡皮筋总是向使总势能减小的方向移动，即橡皮筋受过约束的点 D^0、D^2、…、D^{2i} 及 C^1、C^3、…、C^{2i+1} 总是分别向它原来的平衡位置点 $(D, u^*(D))$ 与 $(C, u^*(C))$ 逼近．既然如此，为了加速这种弹跳，使它们更快地逼近平衡位置，我们为什么不来个"矫枉过正"的措施呢！

由于

$$u^2(D)=u^0(D)+[u^2(D)-u^0(D)]=u^0(D)+\Delta u(D),$$

其中 $\Delta u(D)$ 既指出了松弛的幅度，其正负号又指出了松弛的方向．所以我们可以引进松弛因子 ω．取

$$\begin{aligned}\bar{u}^2(D)&=u^0(D)+\omega[u^2(D)-u^0(D)]\\&=u^0(D)+\omega\Delta u(D),\end{aligned}$$

作为下一次的约束．当 $\omega=1$ 时，即为前面已叙述过的松弛法，也就是我们已经熟悉的完全松弛法；当 $\omega>1$ 时，就成了"矫枉过正"的松弛法，即超松弛法．就我们这个例子而言，采用合适的超松弛因子要比完全松弛法收敛得快些．

第二个例子，薄膜的平衡问题：没有一自重可以忽略不计，张拉在周边固定的平面框架上的理想弹性薄膜，它的张力为 T. 在选定的坐标系里，它在 $x-y$ 平面上的投影是边界为 Γ 的区域 Ω(见图 5.3).

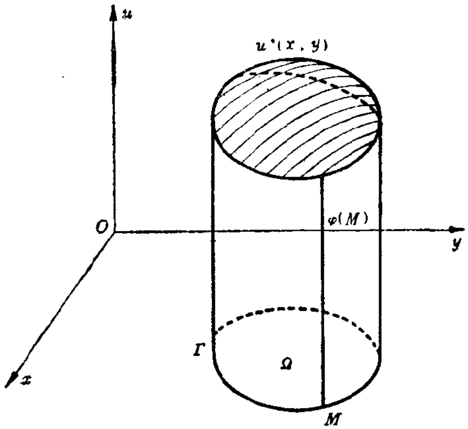


图 5.3

它在垂直于 $x-y$ 平面的强度为 $f(x, y)$ 的外力作用下产生位移 $u(x, y)$，且于 $u^*(x, y)$ 处达到平衡，而框架的位置是 $\varphi(x, y)$. 又设当无外力时 ($f(x, y)=0$) 薄膜的平衡位置为 $u^0(x, y)$，于是在外力作用下薄膜的真实位移为:

$$u(x, y)=u^*(x, y)-u^0(x, y).$$

若记 $$a(u, v)=\iint_{\Omega} T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}\Omega;$$

$$(f, v)=\iint_{\Omega} f v\,\mathrm{d}\Omega.$$

象第一个例子那样，由弹性力学的定律可得到以位移函数 u 为主变量的能量泛函:

$$J(u)=\frac{1}{2}a(u,\ u)-(f,\ u).$$

同样有最小势能问题:

求变分问题

$$\inf_{v\in H_0^1(\Omega)} J(v) \tag{21}$$

的解 u, 其中 $H_0^1(\Omega)=\{v|v\in H^1(\Omega),\ v|_\Gamma=0\}$.

也有虚功方程:

求 $u\in H_0^1(\Omega)$使

$$a(u,\ v)=(f,\ v),\ \forall v\in H_0^1(\Omega). \tag{22}$$

若 $u\in C^2(\Omega)\cap C_0^1(\overline{\Omega})$, 则求薄膜的位移 u 也可归结为解下面的二阶椭圆型偏微分方程的边值问题:

$$\begin{cases}-\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(T\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(T\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\right]=f(x,\ y) & \text{于 } \Omega \text{ 内},\\ u|_\Gamma=0.\end{cases} \tag{23}$$

若薄膜的周边框架位于 $x-y$ 平面内, 即与区域 Ω 的边界 Γ 重合, 此时有 $\varphi(x,\ y)=0$. 故当无外力作用时, 薄膜的平衡位置与 $x-y$ 平面上的区域 Ω 重合, 从而 $u^0(x,\ y)=0$. 在垂直分布的外力 $f(x,\ y)$ 的作用下, 薄膜的真实位移 $u(x,\ y)$ 就是它的平衡位置. 这时它的总势能为

$$J(u)=\frac{1}{2}\iint_\Omega T\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}\Omega-\iint_\Omega fu\,\mathrm{d}\Omega.$$

下面我们叙述解此问题的一种松弛法. 为此, 我们用两条充分光滑的曲线 Γ_1' 和 Γ_2' 把区域Ω 分裂为有重叠部分的两个子区域 Ω_1 和 Ω_2, $\Omega=\Omega_1+\Omega_2$, Ω_1 的边界

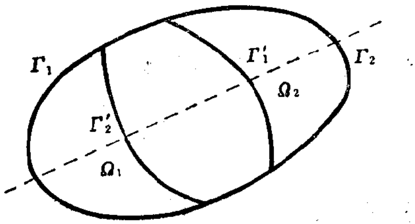


图 5.4

为 Γ_1 与 Γ_1'，Ω_2 的边界为 Γ_2 与 Γ_2'（见图 5.4）.

我们称 Γ_1' 与 Γ_2' 分别为 Ω_1 与 Ω_2 的拟边界.

松弛步骤如下：

(1) 给一初始猜测 $u^0(x, y)\in H_0^1(\Omega)$；

(2) 于拟边界 Γ_1' 上给一约束：$u|_{\Gamma_1'}=u^0|_{\Gamma_1'}$；

(3) 松弛子区域 Ω_1 上的薄膜，即从满足边界约束

$$\begin{cases} u|_{\Gamma_1}=0 \\ u|_{\Gamma_1'}=u^0|_{\Gamma_1'} \end{cases}$$

的一切可能的位移中找到使泛函

$$J_{\Omega_1}(u)=\frac{1}{2}\iint_{\Omega_1} T\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}\Omega-\iint_{\Omega_1} fu\,\mathrm{d}\Omega$$

达到最小者，设为 $\tilde{u}^1(x, y)$，此时整块薄膜的位置是

$$u^1=\{v|\inf_{v\in k_0(\Omega,\Gamma_1')} J_{\Omega_1}(v)=J_{\Omega_1}(\tilde{u}^1)\text{于 }\Omega_1\text{ 内，}$$

$$v=u^0\text{ 于 }\Omega-\Omega_1\text{ 上}\}.$$

其中 $k_0(\Omega, \Gamma_1')=\{v|v\in H_0^1(\Omega),\ v=u^0\text{ 于 }\Gamma_1'\text{ 上}\}$.

显然，$k_0(\Omega, \Gamma_1')\subset H_0^1(\Omega)$，所以有 $u^1\in H_0^1(\Omega)$.

(4) 于拟边界 Γ_2' 上给一约束：$u|_{\Gamma_2'}=u^1|_{\Gamma_2'}$；

(5) 解除 Γ_1' 上的约束：$u|_{\Gamma_1'}=u^0|_{\Gamma_1'}$，使薄膜在子区域 Ω_2 上得到松弛，即从满足边界约束：

$$\begin{cases} u|_{\Gamma_2}=0 \\ u|_{\Gamma_2'}=u^1|_{\Gamma_2'} \end{cases}$$

的一切可能的位移中找到使泛函

$$J_{\Omega_2}(u)=\frac{1}{2}\iint_{\Omega_2} T\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}\Omega-\iint_{\Omega_2} fu\,\mathrm{d}\Omega$$

达到最小者，设为 $\tilde{u}^2(x, y)$，此时整块薄膜的位置是

$$u^2=\{v|\inf_{v\in k_1(\Omega,\Gamma_2')} J_{\Omega_2}(v)=J_{\Omega_2}(\tilde{u}^2)\text{于 }\Omega_2\text{ 内，}$$

$v=u^1$ 于 $\Omega-\Omega_1$ 上$\}$.

其中 $k_1(\Omega, \Gamma_2')=\{v|v\in H_0^1(\Omega), v=u^1$ 于 Γ_2' 上$\}$.

重复(2)～(5)，直到满足某种精度要求 $\|u^{i+1}-u^i\|<\varepsilon$，就得到弹性薄膜的位移之近似解.

我们的方法之实质在于把较大区域上的弹性薄膜的平衡问题化成两个有重叠部分的较小的子区域上的弹性薄膜的平衡问题. 实践中这种处理方法常常会带来很多好处，因为大范围的问题往往具有比小区域上的问题难以解决的困难，特别是大区域具有复杂的形状时. 我们在第6、第7章里将用较多的实例来加以说明.

为了观察这一松弛过程，我们用一垂直于 $x-y$ 平面且与 Γ_1'、Γ_2' 都相交的平面与薄膜相截，如图4上的虚线所示，薄膜在此平面上的截口为一曲线，其松弛过程（见图5.5）与弦的松弛过程(见图5.2)十分相似.

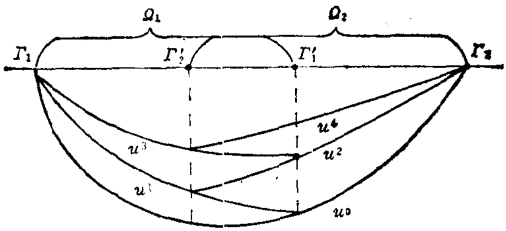


图 5.5

从图5.5可见，每当我们于拟边界 Γ_1' 或 Γ_2' 处解除一次约束，使薄膜在子区域 Ω_1 或 Ω_2 内得到一次松弛，它总是要弹跳到一个新的平衡位置，并且每一次弹跳都是向着它的真正的平衡位置的方向. 为了加快这种松弛的收敛过程，同弦的松弛过程一样，一个"矫枉过正"的思想和办法——超松弛法，再一次被运用.

综上所述，我们得到如下的算法：

(1) 给一初始猜测 $u^0 \in H_0^1(\Omega)$;

(2) 设函数类

$$k_{2i}(\Omega,\ \Gamma_1') = \{v \mid v \in H_0^1(\Omega),\ v = u^{2i} \text{ 于 } \Gamma_1' \text{ 上}\}.$$

求

$$u^{2i+1} = \{v \mid \inf_{v \in k_{2i}(\Omega, \Gamma_1')} J_{\Omega_1}(v) \text{ 于 } \Omega_1 \text{ 内},\ v = u^{2i} \text{ 于 } \Omega - \Omega_1 \text{ 上}\};$$

(3) 设函数类

$$k_{2i+1}(\Omega,\ \Gamma_2') = \{v \mid v \in H_0^1(\Omega),\ v = u^{2i+1} \text{ 于 } \Gamma_2' \text{ 上}\}.$$

求

$$u^{2(i+1)} = \{v \mid \inf_{v \in k_{2i+1}(\Omega, \Gamma_2')} J_{\Omega_2}(v) \text{ 于 } \Omega_2 \text{ 内},\ v = u^{2i+1} \text{ 于 } \Omega - \Omega_2 \text{ 上}\}.$$

$$i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

引进松弛因子 ω 后，上述过程中的(2)、(3)两步改为：

(2′) 求

$$\begin{cases} \hat{u}^{2i+1} = \{v \mid \inf_{v \in k_{2i}(\Omega, \Gamma_1')} J_{\Omega_1}(v) \text{ 于 } \Omega_1 \text{ 内},\ v = u^{2i} \text{ 于 } \Omega - \Omega_1 \text{ 上}\}, \\ u^{2i+1} = u^{2i} + \omega(\hat{u}^{2i+1} - u^{2i}); \end{cases}$$

(3′) 求

$$\begin{cases} \hat{u}^{2(i+1)} = \{v \mid \inf_{v \in k_{2i+1}(\Omega, \Gamma_2')} J_{\Omega_2}(v) \text{ 于 } \Omega_2 \text{ 内},\ v = u^{2i+1} \text{ 于 } \Omega - \Omega_2 \text{ 上}\}, \\ u^{2(i+1)} = u^{2i+1} + \omega(\hat{u}^{2(i+1)} - u^{2i+1}). \end{cases}$$

$$i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

当其中的 $\omega \in (1,\ 2)$ 时即为超松弛法.

这里可提出许多问题，如

(1) 松弛法与超松弛法收敛吗?

(2) 松弛因子如何选取?

(3) 区域分裂的方式对收敛性有无影响?

(4) 分裂后的子区域上的问题如何求解?

这些问题有的将在以后的章节里加以讨论，有的还有待进一步研究. 随着讨论的深入开展，还将提出更多的问题.

第 6 章

区域分裂法——推广的Schwarz交替法

Schwarz 交替法是一个熟知的数值方法. 早在十九世纪六十年代，德国数学家 H. A. Schwarz 就提出了解非凸平面区域上 Laplace 方程第一边值问题的交替法[1]. 一个多世纪以来，一直受到人们的重视. 1890 年，E. Picard 用它来解一类非线性椭圆微分方程，并称之为 Schwarz 交替法[2],[3]. 接着，苏联数学家 С. Л. Соболев 和 С. Г. Михлин 等则把它推广成解变分问题的一种松弛法[5],[42]. Л. В. Канторвич 与 В. И. Крылов 在他们的名著《高等分析近似方法》[4]第七章里对 Schwarz 算法作了较系统的总结. 近年来，不少数值分析工作者又进一步拓广了它的应用范围和深化了它的基本思想. 比如，M. Dryja 把它用于求解有限元方程[43]; R. Glowinski 等把它用于求解流体力学中的非线性问题[44]; W. Hackbusch、G. Starius 则把它引入了多层网格法和残量校正法中. 从而使得这一古老的方法越来越枝繁叶茂，熠熠生辉.

文献[7]、[6]研究了区域分裂的多样性，把区域分裂为两个互相重叠的子区域推广成分裂为多个互相重叠的子区域，并引入了混乱松弛的思想，从而为一类解数学物理问题的异步并行算法奠定了理论基础. 本章就系统地介绍这一算法. 但不深入研究它的异步并行性及其计算机实现的过程，有关这方面的内容文献[68]已作了详细的介绍.

§1 解二阶线性椭圆微分方程的 Schwarz 交替法

考虑 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} Au=f(x),\ 于\ \Omega\ 内; & (1)\\ u|\Gamma=\varphi(x). & (2)\end{cases}$$

其中 $\Omega\subset R^n$ 为一有界开区域，它以 Γ 为边界，A 是二阶线性椭圆微分算子

$$Au\equiv-\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+Bu.$$

设 A: $\Phi(A)\to L_2(\Omega)$ 于 $\Phi(A)$ 正定，$\Phi(A)\subset H_0^1(\Omega)$，且于 $H_0^1(\Omega)$ 中稠密.

记

$$a(u,\ v)=\int_\Omega\left(\sum_{i,k=1}^{n}A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_k}+Buv\right)\mathrm{d}\Omega$$
$$=a_\Omega(u,\ v);$$

$$(f,\ v)=\int_\Omega fv\,\mathrm{d}\Omega=(f,\ v)_\Omega=f_\Omega(v).$$

设双线性形式 $a_\Omega(u,\ v)$ 于 $H_0^1(\Omega)$ 中一致椭圆，即存在常数 $\gamma>0$，使得

$$a_\Omega(u,\ u)\geqslant\gamma\|u\|_1^2,\quad\forall u\in H_0^1(\Omega).$$

取 $u^0\in H_\varphi^1(\Omega)$，则问题(1)～(2)的弱形式为

$$\begin{cases}求\ u\in H_\varphi^1(\Omega)\ 使\ u-u^0\in H_0^1(\Omega)，且\\ a_\Omega(u,\ v)=(f,\ v)_\Omega,\quad\forall v\in H_0^1(\Omega).\end{cases}\tag{3}$$

当 $a_\Omega(u,\ v)=a_\Omega(v,\ u)$ 时，它等价于问题：

$$\begin{cases}求\ u\in H_\varphi^1(\Omega)\ 使\ u-u^0\in H_0^1(\Omega)，且\\ J_\Omega(u)=\inf\limits_{v-u^0\in H_0^1(\Omega)}J_\Omega(v),\end{cases}\tag{4}$$

其中 $$J_\Omega(v)=\frac{1}{2}a_\Omega(v, v)-(f, v)_\Omega.$$

在上述假定下，若 $f_\Omega(v)$ 与 $a_\Omega(u, v)$ 还在 $H_0^1(\Omega)$ 上连续，则根据 Lax-Milgram 定理，知问题(1)～(2)之弱解(即问题(3)或问题(4)之解)存在且唯一.

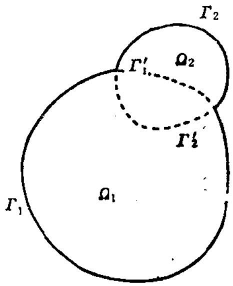


图 6.1

设区域 Ω 可分裂为如图 6.1 所示的有重叠部分的两个子区域 Ω_1 与 Ω_2 之和，即 $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$, $\Omega_1\cap\Omega_2\neq 0$, $\Omega_j(j=1, 2)$的边界与拟边界分别记为 Γ_j 与 Γ_j', $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$, $\Gamma_j'\subset\Omega$, 且足够光滑，$\Gamma_j'=\Gamma_j'\cap\Omega_i(i\neq j)$. 此外还得保证分裂后的每一子域 Ω_j 上相应的问题(1)～(2)或(3)～(4)可解.

对于问题(1)～(2), Schwarz 交替法可述如下:

格式 I 给一初始猜测 $\mu^0\in H_\varphi^1(\Omega)\cap C^2(\overline{\Omega})$, 作 Schwarz 序列(简称为 S_I—序列)$\{u^i\}_0^\infty$, 它们是问题集

$$\begin{cases}1.\ \begin{cases}Au^{2i+1}=f & \text{于 } \Omega_1 \text{ 内},\\ u^{2i+1}=u^{2i} & \text{于 } \Omega-\Omega_1 \text{ 上},\\ u^{2i+1}|_\Gamma=\varphi;\end{cases} & (5)\\ 2.\ \begin{cases}Au^{2(i+1)}=f & \text{于 } \Omega_2 \text{ 内},\\ u^{2(i+1)}=u^{2i+1} & \text{于 } \Omega-\Omega_2 \text{ 上},\\ u^{2(i+1)}|_\Gamma=\varphi.\end{cases} & (6)\end{cases}$$

$$i=0, 1, 2, \cdots.$$

的解.

对于问题(3), Schwarz 交替法可表述如下:

格式 II 给一初始猜测 $u^0\in H_\varphi^1(\Omega)$, 作 S_{II}—序列 $\{u^i\}_0^\infty$, 它们是下述问题集之解:

$$
\begin{cases}
1, & \begin{cases} \text{求 } u^{2i+1}\in K_{2i}(\Gamma_1')\text{使} \\ a_\Omega(u^{2i+1}, \bar{v})=f_\Omega(\bar{v}),\quad \forall\bar{v}\in K^0(\Gamma_1'); \end{cases} \quad (7) \\
2, & \begin{cases} \text{求 } u^{2(i+1)}\in K_{2i+1}(\Gamma_2')\text{使} \\ a_\Omega(u^{2(i+1)}, \bar{v})=f_\Omega(\bar{v}),\quad \forall\bar{v}\in K^0(\Gamma_2'). \end{cases} \quad (8)
\end{cases}
$$

$$
i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.
$$

对于问题(4)，Schwarz 交替法则可表述为如下格式:

格式 III 给一初始猜测 $u^0\in H^1_\varphi(\Omega)$，作 S_{III}—序列 $\{u^i\}_0^\infty$:

1. $u^{2i+1}=\{v|\inf\limits_{v\in K_{2i}(\Gamma_1')} J_{\Omega 1}(v)$于 Ω_1 内, $v=u^{2i}$ 于 $\Omega-\Omega_1$ 上$\}$;

2. $u^{2(i+1)}=\{v|\inf\limits_{v\in K_{2i+1}(\Gamma_2')} J_{\Omega 2}(v)$于 Ω_2 内, $v=u^{2i+1}$ 于 $\Omega-\Omega_2$ 上$\}$.

$$
i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.
$$

其中函数类 $K_i(\Gamma_j')$与 $K^0(\Gamma_j')$分别定义为:

$$
K_i(\Gamma_j')=\{v|v\in H^1_\varphi(\Omega),\ v|_{\Gamma_j'}=u^i|_{\Gamma_j'}\};
$$

$$
K_i^0(\Gamma_j')=\{v|v\in H^1_0(\Omega),\ v|_{\Gamma_j'}=0\}.
$$

显然， $K_i(\Gamma_j')\subset H^1_\varphi(\Omega)$, $K_i^0(\Gamma_j')\subset H^1_0(\Omega)$.

现在要证明，问题(1)～(2)等价于问题集:

$$
\begin{cases}
Au_i=f,\quad \text{于 } \Omega_i \text{ 内}; \\
u_i|_{\Gamma_i}=\varphi; \\
u_i|_{\Gamma_i'}=u_j,\quad i=1,\ 2、j\neq i.
\end{cases} \tag{9}
$$

实际上，若 u^* 是问题(1)～(2)的解，则有

$$
\begin{cases}
Au^*=f\quad \text{于 } \Omega_i \text{ 内}; \\
u^*|_{\Gamma_i}=\varphi; \\
u^*|_{\Gamma_i'}=u^*,\quad i=1,\ 2.
\end{cases}
$$

即 u^* 是问题集 (9) 的解. 反之，若 u_1^* 与 u_2^* 是问题集 (9) 的

解，则它们之差 $u_1^*-u_2^*$ 在子区域的重叠部分 $\Omega_{12}=\Omega_1\cap\Omega_2$ 上都满足问题

$$\begin{cases}Au=0 & 于\ \Omega_{12}\ 内;\\ u|_{\Gamma_1'\cup\Gamma_2'}=0.\end{cases}$$

故在 Ω_{12} 上 $u_1^*=u_2^*$. 我们定义一个函数:

$$u^*=\begin{cases}u_1^* & 于\ \Omega_1;\\ u_2^* & 于\ \Omega-\Omega_1.\end{cases}$$

则 u^* 即问题(1)～(2)的解.

由此可见，若由格式 I 得到的函数序列 $\{u^i\}_0^\infty$ 收敛，且其其极限是问题集(9)的解，则它也就是问题(1)～(2)的解;

问题集(5)、(6)的广义解(在 Галеркин 意义下)即问题集(7)、(8)的解. 若由格式 II 得到的函数序列 $\{u^i\}_0^\infty$ 收敛，且其极限是问题集(9)的广义解，则它也就是问题(1)～(2)的广义解;

当算子 A 满足正定对称的假设时，格式 III 与格式 II 是等价的. 所以，若由格式 III 得到的函数序列 $\{u^i\}_0^\infty$ 收敛，且其极限是问题(4)的解，则它即问题(1)～(2)的广义解.

我们着重研究求问题(1)～(2)广义解的方法. 为方便计，我们将只对格式 III 研究 Schwarz 交替法的收敛性.

定理 6.1 若双线性形式 $a_\Omega(u, v)$ 于 $H_0^1(\Omega)$ 上连续且为一致椭圆，$f_\Omega(v)$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 上的连续线性泛函，则 Schwarz 交替法收敛，即 S_{III}-序列 $\{u^i\}_0^\infty$ 收敛到问题(4)的解 u^*(或等价地 S_{II}—序列收敛到问题(3)的解 u^*).

证明 我们分五个步骤来证明.

(i) 首先证明序列 $\{J_\Omega(u^i)\}_0^\infty$ 是单调下降的.

由格式 III 及等式

$$J_\Omega(v)=J_{\Omega_j}(v)+J_{\Omega-\Omega_j}(v)\quad j=1,\ 2,$$

可推得

$$\begin{aligned}
J_\Omega(u^{2i})&=J_{\Omega_2}(u^{2i})+J_{\Omega-\Omega_2}(u^{2i})\\
&=\inf_{v\in K_{2i-1}(\Gamma_2')} J_{\Omega_2}(v)+J_{\Omega-\Omega_2}(u^{2i-1})\\
&\leqslant J_{\Omega_2}(u^{2i-1})+J_{\Omega-\Omega_2}(u^{2i-1})\\
&=J_\Omega(u^{2i-1})\\
&=J_{\Omega_1}(u^{2i-1})+J_{\Omega-\Omega_1}(u^{2i-1})\\
&=\inf_{v\in K_{2i-2}(\Gamma_1')} J_{\Omega_1}(v)+J_{\Omega-\Omega_1}(u^{2i-2})\\
&\leqslant J_{\Omega_1}(u^{2i-2})+J_{\Omega-\Omega_1}(u^{2i-2})=J_\Omega(u^{2(i-1)}),
\end{aligned}$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots.$$

只要$u^{2i}\neq u^{2(i-1)}$，则必有严格不等式成立．故$\{J_\Omega(u^i)\}_0^\infty$是单调下降序列．

(ii) 其次证明$\{u^i-u^*\}$在$H_0^1(\Omega)$中有界．

事实上，对任何实数t，有

$$tu^*+(1-t)u^i\in H_\varphi^1(\Omega).$$

又
$$J_\Omega(u^*)=\inf_{v\in H_\varphi^1(\Omega)} J_\Omega(v),$$

故必有

$$\left.\frac{\partial J_\Omega(tu^*+(1-t)u^i)}{\partial t}\right|_{t=1}=0. \tag{10}$$

由(10)可以得到等式

$$a_\Omega(u^*,\ u^i)=a_\Omega(u^*,\ u^*)-f_\Omega(u^*-u^i). \tag{11}$$

利用(11)式和$a_\Omega(u^i-u^*,\ u^i-u^*)$的一致椭圆性，并利用$\{J_\Omega(u^i)\}_0^\infty$的单调下降性，可得

$$\begin{aligned}
\|u^i-u^*\|_1^2&\leqslant\frac{1}{r}a_\Omega(u^i-u^*,\ u^i-u^*)\\
&=\frac{1}{r}[a_\Omega(u^i,\ u^i)-a_\Omega(u^*,\ u^*)+2f_\Omega(u^*-u^i)]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{2}{r}[J_\Omega(u^i)-J_\Omega(u^*)]\\
&\leqslant\frac{2}{r}[J_\Omega(u^0)-J_\Omega(u^*)]\\
&=M,
\end{aligned}
\tag{12}
$$

这表明 $\{u^i-u^*\}_0^\infty$ 是一有界序列.

(iii) 证明 $\{u^i\}_0^\infty$ 中存在弱收敛于 $u\in H_\varphi^1(\Omega)$ 的子序列 $\{u^{i_k}\}_0^\infty$.

事实上, 由于 Hilbert 空间 $H_0^1(\Omega)$ 中的有界无穷集是弱紧致的, 故 $\{u^i-u^*\}_0^\infty$ 中必可选出弱收敛的子序列 $\{u^{i_k}-u^*\}_0^\infty$, 即当 $i_k\to\infty$ 时有

$$
u^{i_k}-u^*\to w\in H_0^1(\Omega),
\tag{13}
$$

即

$$
u^{i_k}\to w+u^*=u\in H_\varphi^1(\Omega).
\tag{14}
$$

(iv) 证明 $u=u^*$.

若记

$$
K(\Gamma_j')=\{v\,|\,v\in H_\varphi^1(\Omega);\ \ v=u \text{ 于 } \Gamma_j' \text{ 上}\},
$$

由于格式 III 等价于格式 II, 则当 $i_k\to\infty$ 时, 有

$$
\left\{\begin{aligned}
&u\in K(\Gamma_j')\subset H_\varphi^1(\Omega),\\
&a_{\Omega_j}(u,\ \bar v)=f_{\Omega_j}(\bar v),\quad \forall\bar v\in K^0(\Gamma_j'),
\end{aligned}\right.
\tag{15}
$$

$$
j=1,\ 2.
$$

即 u 为问题集(9)的广义解. 故 $u=u^*$.

(v) 最后证明 $u^i\to u^*$, 当 $i\to\infty$ 时.

由(i)与(iv)知有

$$
\lim_{i\to\infty}J_\Omega(u^i)=J_\Omega(u^*).
\tag{16}
$$

由(12)及上式得

$$\lim_{i\to\infty}\|u^i-u^*\|_1^2\leqslant\lim_{i\to\infty}\frac{2}{r}[J_\Omega(u^i)-J_\Omega(u^*)]=0,$$

故 $\{u^i\}_0^\infty$ 强收敛到 u^*. 定理得证.

§2 带松弛因子的 Schwarz 交替法及误差估计

为了加速交替过程的收敛速度，正如我们在上一章已看到的那样，可以引入松弛因子 ω. 例如，在上一节的格式 III 中引进松弛因子 ω，可构造出如下带松弛因子的 Schwarz 交替格式——$S_{\text{III},\omega}$ 格式:

给一初始猜测 $u^0\in H_\varphi^1(\Omega)$, 作 $S_{\text{III},\omega}$—序列 $\{u^i\}_0^\infty$:

$$1,\ \begin{cases}\hat{u}^{2i+1}=\{v\mid\inf\limits_{v\in K_{2i}(\Gamma_1')}J_{\Omega_1}(v)\text{ 于 }\Omega_1\text{ 内},\ v=u^{2i}\text{ 于}\\ \qquad\Omega-\Omega_1\text{ 上}\},\\ u^{2i+1}=u^{2i}+\omega(\hat{u}^{2i+1}-u^{2i});\end{cases}$$

$$2,\ \begin{cases}\hat{u}^{2(i+1)}=\{v\mid\inf\limits_{v\in K_{2i+1}(\Gamma_2')}J_{\Omega_2}(v)\text{ 于 }\Omega_2\text{ 内},\ v=u^{2i+1}\\ \qquad\text{于 }\Omega-\Omega_2\text{ 上}\},\\ u^{2(i+1)}=u^{2i+1}+\omega(\hat{u}^{2(i+1)}-u^{2i+1}).\end{cases}$$

$$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

现在来讨论它的收敛性. 由上述格式知

$$u^{2i+1}=u^{2i}+\omega(\hat{u}^{2i+1}-u^{2i})\in K_{2i}(\Gamma_1').$$

故对任何 $\omega\in R$ 都成立不等式

$$J_{\Omega_1}(u^{2i+1})\geqslant J_{\Omega_1}(\hat{u}^{2i+1}).$$

这样一来，$J_{\Omega_1}(u^{2i+1})=J_{\Omega_1}(u^{2i}+\omega(\hat{u}^{2i+1}-u^{2i}))$ 作为 ω 的函数, 当 $\omega=1$ 时达到极小值 $J_{\Omega_1}(\hat{u}^{2i+1})$, 因此必有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}J_{\Omega_1}(u^{2i+1})\Big|_{\omega=1}=0.$$

从而推出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}J_{\Omega_1}(u^{2i+1})\Big|_{\omega=1}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}J_{\Omega_1}(u^{2i}+\omega(\hat{u}^{2i+1}-u^{2i}))\Big|_{\omega=1}$$

$$=[\omega a_{\Omega 1}(\hat{u}^{2i+1},\ \hat{u}^{2i+1})+(1-2\omega)a_{\Omega_1}(u^{2i},\ \hat{u}^{2i+1})$$

$$-(1-\omega)a_{\Omega_1}(u^{2i},\ u^{2i})-(f,\ \hat{u}^{2i+1}-u^{2i})_{\Omega_1}]\Big|_{\omega=1}$$

$$=a_{\Omega_1}(\hat{u}^{2i+1},\ \hat{u}^{2i+1})-a_{\Omega_1}(u^{2i},\ \hat{u}^{2i+1})-(f,\hat{u}^{2i+1}-u^{2i})_{\Omega_1}$$

$$=0,$$

从而得到

$$a_{\Omega_1}(\hat{u}^{2i+1},\ u^{2i})=a_{\Omega_1}(\hat{u}^{2i+1},\ \hat{u}^{2i+1})-(f,\ \hat{u}^{2i+1}-u^{2i})_{\Omega_1}. \tag{17}$$

应用(17)式并经简单计算可得

$$J_\Omega(u^{2i+1})=J_{\Omega_1}(u^{2i+1})+J_{\Omega-\Omega_1}(u^{2i+1})$$

$$=\frac{1}{2}a_{\Omega_1}(u^{2i}+\omega(\hat{u}^{2i+1}-u^{i}),u^{2i}+\omega(\hat{u}^{2i+1}-u^{2i}))$$

$$-(f,\ u^{2i}+\omega(\hat{u}^{2i+1}-u^{2i}))_{\Omega_1}+J_{\Omega-\Omega_1}(u^{2i})$$

$$=J_\Omega(u^{2i})-\omega(2-\omega)[J_{\Omega_1}(u^{2i}-J_{\Omega 1}(\hat{u}^{2i+1})]. \tag{18}$$

注意到 $\qquad u^{2i+1}-u^{2i}\in K^0(\Gamma_1')\in H_0^1(\Omega)$

及 $u^{2i+1}=u^{2i}$ 于 $\Omega-\Omega_1$ 上．再次利用(17)式还可得到

$$a_\Omega(u^{2i+1}-u^{2i},\ u^{2i+1}-u^{2i})$$

$$=a_{\Omega_1}(\omega(\hat{u}^{2i+1}-u^{2i}),\ \omega(\hat{u}^{2i+1}-u^{2i}))$$

$$=\omega^2 a_{\Omega_1}(\hat{u}^{2i+1}-u^{2i},\ \hat{u}^{2i+1}-u^{2i})$$

$$=\omega^2[a_{\Omega_1}(\hat{u}^{2i+1},\ \hat{u}^{2i+1})-2a_{\Omega_1}(\hat{u}^{2i+1},\ u^{2i})$$

$$+a_{\Omega_1}(u^{2i},\ u^{2i})]$$

$$=2\omega^2[J_{\Omega_1}(u^{2i})-J_{\Omega_1}(\hat{u}^{2i+1})],$$

故当 $\omega\neq0$ 时有

$$J_{\Omega_1}(u^{2i})-J_{\Omega_1}(\hat{u}^{2i+1})=\frac{1}{2\omega^2}a_\Omega(u^{2i+1}-u^{2i},\ u^{2i+1}-u^{2i}).\tag{19}$$

将(19)代入(18)得到

$$J_\Omega(u^{2i+1})=J_\Omega(u^{2i})-\frac{2-\omega}{2\omega}a_\Omega(u^{2i+1}-u^{2i},\ u^{2i+1}-u^{2i}).\tag{20}$$

若 $a_\Omega(u,\ v)$于 $H_0^1(\Omega)$为一致椭圆，只要 $u^{2i+1}\neq u^{2i}$，则有

$$a_\Omega(u^{2i+1}-u^{2i},\ u^{2i+1}-u^{2i})\geqslant\gamma\|u^{2i+1}-u^{2i}\|_1^2>0.$$

此时只要
$$\frac{2-\omega}{2\omega}>0,$$
即
$$0<\omega<2,\tag{21}$$
则由(20)得

$$J_\Omega(u^{2i})-J_\Omega(u^{2i+1})\geqslant\frac{2-\omega}{2\omega}\gamma\|u^{2i+1}-u^{2i}\|_1^2.$$

当(21)被满足时，不难看出 $\{J_\Omega(u^i)\}_0^\infty$ 是单调下降的. 仿照定理 6.1 可以证明:

定理 6.2 在定理 6.1 的假设下，若 $\omega\in(0,\ 2)$，则带松弛因子 ω 的 Schwarz 交替法收敛，即 $S_{\mathrm{III},\omega}$—序列 $\{u^i\}_0^\infty$ 收敛到问题(4)的解 u^*.

当取 $\omega\in(1,\ 2)$时，格式 $S_{\mathrm{III},\omega}$—称为 Schwarz 交替超松弛法. 不难理解，对格式 I 与格式 II 可类似地构造出带松弛因子的 $S_{\mathrm{I},\omega}$—与 $S_{\mathrm{II},\omega}$—格式，亦可类似地证明它们的收敛性.

现在研究 Schwarz 交替法的误差估计. 为论证方便起见，仅就格式 II 求得的第 i 步近似解 u^i 对问题(3)的解 u^* 的误差作出估计.

定理 6.3 若双线性形式 $a_\Omega(u,\ v)$于 $H_0^1(\Omega)$上连续，且为一致椭圆，则有

$$\|u^*-u^i\|_1 \leqslant C \inf_{v\in K_{i-1}(\Gamma'_j)} \|u^*-v\| \quad j=1 \text{ 或 } 2. \qquad (22)$$

其中 $C>0$ 为与 u^* 和 i 都无关的常数.

证明 由 $a_\Omega(u, v)$ 的连续性知存在常数 $M>0$, 使得

$$|a_\Omega(u, v)| \leqslant M\|u\|_1\|v\|_1, \ \forall u, v\in H_0^1(\Omega). \qquad (23)$$

$\{u^i\}_0^\infty$ 中的元素 u^i 满足方程

$$a_\Omega(u^i, \bar{v}) = f_\Omega(\bar{v}), \ \forall \bar{v}\in K^0(\Gamma'_j). \qquad (24)$$

因 u^* 是(3)的解, 故有

$$a_\Omega(u^*, \bar{v}) = f_\Omega(\bar{v}), \ \forall \bar{v}\in K^0(\Gamma'_j). \qquad (25)$$

因 $K^0(\Gamma''_j)\subset H_0^1(\Omega)$, 从(15)减去(14)得

$$a_\Omega(u^*-u^i, \bar{v}) = 0, \forall \bar{v}\in K^0(\Gamma'_j). \qquad (26)$$

记 $v=\bar{v}+u^i$, 于是 $v\in K_{i-1}(\Gamma'_j)$, 由 $a_\Omega(u, w)$ 的一致椭圆性及(23)、(26)可推得

$$\begin{aligned}\|u^*-u^i\|_1^2 &\leqslant \frac{1}{r} a_\Omega(u^*-u^i, u^*-u^i)\\ &= \frac{1}{r}[a_\Omega(u^*-u^i, u^*-u^i) - a_\Omega(u^*-u^i, \bar{v})]\\ &= \frac{1}{r} a_\Omega(u^*-u^i, u^*-v)\\ &\leqslant \frac{M}{r}\|u^*-u^i\|_1\|u^*-v\|_1, \ \forall v\in K_{i-1}(\Gamma'_j).\end{aligned}$$

消去共同因子 $\|u^*-u^i\|_1$, 并令 $C=\frac{M}{r}$, 得

$$\|u^*-u^i\|_1 \leqslant C\|u^*-v\|_1, \ \forall v\in K_{i-1}(\Gamma'_j).$$

两端关于 $v\in K_{i-1}(\Gamma'_j)$ 取下确界, 即得(22). 定理证毕.

下面我们引用 R. stoutemyer 的例子[10], 以作为对 Schwarz 交替法的应用.

例

$$\begin{cases}\Delta u=0 & \text{于 } \Omega \text{ 内},\\ u|\Gamma_1=\varphi_1(\theta), \\ u|\Gamma_2=\varphi_2(\theta).\end{cases}$$

其中 $\Omega=\Omega_1: x^2+y^2\leqslant R_1^2 \cup \Omega_2: (x-D)^2+y^2\leqslant R_2^2$,
Ω 的边界为 $\Gamma_1\cup\Gamma_2$(参见图 (6.2).

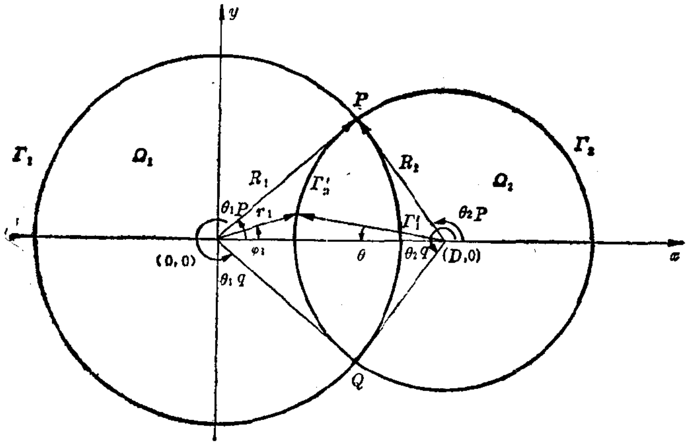


图 6.2

Stoutemyer 按照 Schwarz 交替法的思想，把区域 Ω 分裂成如图 6.2 所示的两个互相重叠的圆域 Ω_1 与 Ω_2, Ω_1 的边界为 $\Gamma_1\cup\Gamma_1'$, Ω_2 的边界为 $\Gamma_2\cup\Gamma_2'$. 然后构造如下的计算格式:

任给一初始猜测 $\varphi_0(\theta)$, 作如下交替松弛:

$$1,\quad \begin{cases}\Delta u_1=0 & \text{于 } \Omega_1 \text{ 内},\\ u_1|_{\Gamma_1}=\varphi_1(\theta), \\ u_1|_{\Gamma_1'}=\varphi_0(\theta).\end{cases}$$

$$
2,\quad \begin{cases} \Delta u_2 = 0 & \text{于 } \Omega_2 \text{ 内}, \\ u_2|_{\Gamma_2} = \varphi_2(\theta), \\ u_2|_{\Gamma_2'} = u_1|_{\Gamma_2'}. \end{cases}
$$

其中 $u_1|_{\Gamma_2'}$ 在第二次及第二次松弛以后为 $u_1|_{\Gamma_1'} = u_2|_{\Gamma_1'}$，从而有

$$
u_1 = u_1(\varphi_1,\ u_2|_{\Gamma_1'}),
$$

$$
u_2 = u_2(\varphi_2,\ u_1|_{\Gamma_2'}).
$$

其中

$$
u_1|_{\Gamma_1'} = u_2(\theta_1)|_{\Gamma_1'} = \frac{1}{2\pi}\Big(\int_0^{\theta_2 P} \varphi_2(\theta_2) k_2(\theta_1,\ \theta_2)\mathrm{d}\theta_1 + \int_{\theta_2\theta}^{2\pi} \varphi_2(\theta_2) k_2(\theta_1,\ \theta_2)\mathrm{d}\theta_1 + \int_{\theta_2 P}^{\theta_2\theta} u_1(\theta_2)|_{\Gamma_2'} k(\theta_1,\ \theta_2)\mathrm{d}\theta_2\Big).
$$

式中
$$
K_2(\theta_1,\ \theta_2) = \frac{R_2^2 - r_2^2}{R_2^2 + r_2^2 - 2R_2 r_2 \cos(\theta_2 - \psi_2)},
$$

$$
r_2^2 = R_1^2 + D^2 - 2R_1 D \cos\theta_1,
$$

$$
\psi_2 = \mathrm{tg}^{-1} \frac{2DR_1 \sin\theta_1}{D^2 + r_2^2 - R_1^2},
$$

$$
\theta_2\theta = 2\pi - \theta_2 P.
$$

$$
u_2|_{\Gamma_2'} = u_1(\theta_2)|_{\Gamma_2'} = \frac{1}{2\pi}\Big(\int_{\theta_1 P}^{\theta_1\theta} \varphi_1(\theta_1) K_1(\theta_1,\ \theta_2)\mathrm{d}\theta_1 + \int_{\theta_1\theta}^{\theta_1 P} u_2(\theta_1)|_{\Gamma_1'} K_1(\theta_1,\ \theta_2)\mathrm{d}\theta_1\Big).
$$

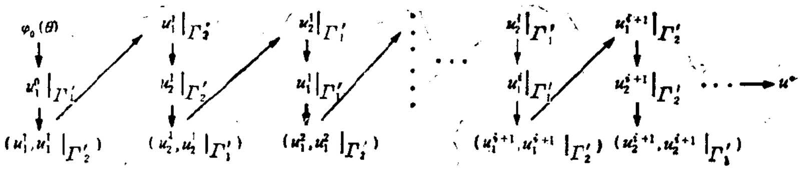
式中
$$
K_1(\theta_1,\ \theta_2) = \frac{R_1^2 - r_1^2}{R_1^2 + r_1^2 - 2R_1 r_1 \cos(\theta_1 - \psi_1)},
$$

$$
r_1^2 = R_2^2 + D^2 + 2R_2 D \cos\theta_2,
$$

$$
\psi_1 = \mathrm{tg}^{-1} \frac{2R_2 D \sin\theta_2}{r_1^2 + D^2 - R_2^2},
$$

$$
\theta_1\theta = 2\pi - \theta_1 P.
$$

交替过程如图所示:



于 Ω_1 上　于 Ω_2 上　于 Ω_1 上　…　于 Ω_1 上　于 Ω_2 上　…

可以看出，原方程已表示成联立的积分方程 1～2，且其计算已转化成带有弱奇异性核的数值积分问题.

Stoutemyer 1972 年在 IBM 360 计算机上用双精度算术运算作了数值试验. 结果表明，只有两个几何参数影响进程的速度与精度，其一是圆盘的相对尺寸，其二是重叠部分的多少，它们均由重叠部分所张的圆心角(θ_{1P} 与 θ_{2P})所唯一确定. 至于区域的绝对位置、方位尺寸对速度与精度影响甚微[10].

表 6.1 给出了他取 $\theta_{1P}=60°$，$\theta_{2P}=120°$ 时的部分数值结果：

表 6.1

	非均匀间隔		均匀间隔	
拟边界上节点数	迭代次数	误　差	迭代次数	误　差
2	10	0.004993	10	0.004993
4	12	0.001683	13	0.002284
8	13	0.000521	14	0.000604
16	13	0.000165	14	0.000150
32	13	0.000055	14	0.000037
64	14	0.000019	14	0.000009
128	14	0.000007	14	0.000002

由此表可以清楚地看出，用 Schwarz 交替法则只需很少的迭代次数，便可获得较高的精度.

在对以上例子用 Schwarz 交替法计算后，Stoutemyer 有如下一段议论：Schwarz 方法"是对非正规区域的，它们与有限元法不同，因为前者的区域必须是特殊易解区域的和集或交集. 虽然任何区域可以由足够简单的区域之和集或交集任意好地逼近"，但是 Schwarz 方法"对多于两个简单区域的竞争性似乎是可疑的"[10]. 然而，下面我们对 Schwarz 交替法的推广，将解除 Stoutemyer 的这一疑虑. 不但证明了 Schwarz 交替法的思想适用于任意有限个简单区域的和集和交集，而且证明了 Schwarz 交替法的思想具备其他方法所不具备的某些优越性.

§3 区域分裂法

仔细剖析 Schwarz 交替法所蕴含的思想，它给我们以这样一个启迪：把一个较大而复杂的区域分裂成若干个具有重叠部分的较小而简单的区域，然后在它们之间交替地进行松弛，有可能方便地用于求解区域的几何形状甚为怪异、边界条件甚为复杂的问题. 本节就基于这种思想来发展 Schwarz 交替法的理论，结果将导出更一般的区域分裂法.

仍以问题(1)～(2)为模型.

首先对 Schwarz 分裂方式作如下推广：

设将区域 Ω 分裂为 $m(\geqslant 2)$ 个子区域 $\Omega_j(j\in M=\{1, 2, \cdots, m\})$ 之和，即 $\Omega=\bigcup_{j=1}^{m}\Omega_j$(见图 8). 我们约定：对每一 $j\in M$，Ω_j 的边界为 $\Gamma_j\cup\Gamma'_j$，其中 $\Gamma'_j\subset R$，称为 Ω_j 的拟边界，它

是足够光滑的，且

$$\Gamma'_j=\bigcup_{i=1}^{m}(\Gamma'_j\cap\Omega_i)\neq 0,\quad \bigcap_{j=1}^{m}\Gamma_j=\Gamma.$$

在以后，凡是说到区域分裂都假定满足上述各条件.

必须指出的是，我们所指的区域分裂没有包括子区域之间无重叠的情形. 对于后者，亦有不少数值分析工作者作了许多有意义的工作，比如 P. E. Bjorstad、O. B. Widlund [48] 和 M. Dryja [43] 等. 他们的工作说明无重叠的分裂方式同样是值得研究和发展的.

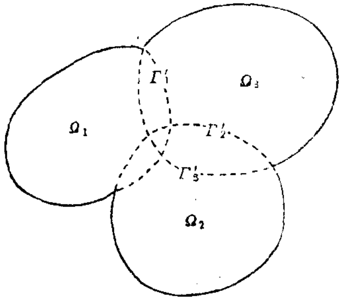


图 6.3

我们对 Schwarz 交替法的推广，是建立在满足前述条件的有重叠分裂的方式上的，称之为区域分裂法，或简记为 S—算法.

S—算法可叙述如下：

格式 I　任给一初始猜测 $u^0\in H^1_\varphi(\Omega)$，对 $t=0,1,2,\cdots$，作 S_I—序列 $\{u^t\}_0^\infty$，它们是下述问题集之解：

$$\begin{cases} 1. \begin{cases} Au^{mt+1}=f & \text{于 } \Omega_1 \text{ 内},\\ u^{mt+1}=u^{mt} & \text{于 } \Omega-\Omega_1 \text{ 上},\\ u^{mt+1}|_\Gamma=\varphi; \end{cases}\\ 2. \begin{cases} Au^{mt+2}=f & \text{于 } \Omega_2 \text{ 内},\\ u^{mt+2}=u^{mt+1} & \text{于 } \Omega-\Omega_2 \text{ 上},\\ u^{mt+2}|_\Gamma=\varphi; \end{cases}\\ \quad\vdots \end{cases}$$

$$
m.\quad \begin{cases} Au^{mt+m}=f & \text{于 } \Omega_m \text{ 内}, \\ u^{mt+m}=u^{mt+m-1} & \text{于 } \Omega-\Omega_m \text{ 上}, \\ u^{mt+m}|_{\Gamma}=\varphi. \end{cases}
$$

对于问题(3)，区域分裂法可表述如下：

格式 II 任给一初始猜测 $u^0\in H^1_\varphi(\Omega)$，对 $t=0, 1, 2, \cdots$，作 S_{II}—序列 $\{u^i\}_0^\infty$，它们是下述问题集之解：

$$
\begin{cases}
1.\ \begin{cases} \text{求 } u^{mt+1}\in K_{mt}(\Gamma_1'), \text{使} \\ a_\Omega(u^{mt+1}, \bar{v})=f_\Omega(\bar{v}), \quad \forall \bar{v}\in K^0(\Gamma_1'); \end{cases} \\
2.\ \begin{cases} \text{求 } m^{mt+2}\in K_{mt+1}(\Gamma_2'), \text{使} \\ a_\Omega(u^{mt+2}, \bar{v})=f_\Omega(\bar{v}), \quad \forall \bar{v}\in K^0(\Gamma_2'); \end{cases} \\
\qquad \vdots \\
m.\ \begin{cases} \text{求 } u^{mt+m}\in K_{mt+m-1}(\Gamma_m'), \text{使} \\ a_\Omega(u^{mt+m}, \bar{v})=f_\Omega(\bar{v}), \quad \forall \bar{v}\in K^0(\Gamma_m'). \end{cases}
\end{cases}
$$

对于问题(4)，区域分裂法可表述如下：

格式 III 任给一初始猜测 $u^0\in H^1_\varphi(\Omega)$，对 $t=0, 1, 2, \cdots$，作 S_{III}—序列 $\{u^i\}_0^\infty$：

$$
\begin{cases}
u^{mt+1}=\{v \mid \inf\limits_{v\in K_{mt}(\Gamma_1')} J_{\Omega_1}(v) \text{ 于 } \Omega_1 \text{ 内}；\ v=u^{mt} \\
\qquad \text{于 } \Omega-\Omega_1 \text{ 上}\}; \\
u^{mt+2}=\{v \mid \inf\limits_{v\in K_{mt+1}} (\Gamma_2') J_{\Omega_2}(v) \text{ 于 } \Omega_2 \text{ 内}; \\
\qquad v=u^{mt+1} \text{ 于 } \Omega-\Omega_2 \text{ 上}\}, \\
\quad \vdots \\
u^{mt+m}=\{v \mid \inf\limits_{v\in K_{mt+m-1}(\Gamma_m')} J_{\Omega_m}(v) \text{ 于 } \Omega_m \text{ 内}; \\
\qquad v=u^{mt+m-1} \text{ 于 } \Omega-\Omega_m \text{ 上}\}.
\end{cases}
$$

其中格式 II、格式 III 中的函数类 $K_{mt+j-1}(\Gamma'_j)$ 与 $K^0(\Gamma'_j)$ 的定义与上节相同.

如果以 j 为内循环参数, t 为外循环参数, 则格式 III 可形式地描述为

$$\begin{cases} \text{For} \quad t=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \\ \text{For} \quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ m \\ u^{mt+j}=\{v \mid \inf\limits_{v\in K_{mt+j-1}(\Gamma'_j)} J_{\Omega_j}(v) \text{于 } \Omega_j \text{ 内}; \end{cases}$$

$$v=u^{mt+j-1} \text{ 于 } \Omega-\Omega_j \text{ 上}\}.$$

这是一种系统的松弛方法. 当 $m=2$ 时就是通常的 Schwarz 交替法.

为了下面所要证明的 S—算法的收敛性, 我们在此强调: 上述三种格式中的循环次数 t 每增加 1, 松弛运算必须依原定次序对每一子区域执行过且只执行过一遍.

S—算法的收敛性, 基于以下一个事实: 当问题的解充分光滑时, 上述三种格式是等价的. 为说明这一事实, 我们首先要说明问题 (1) ~ (2) 等价于问题集:

$$\begin{cases} Au_i=f \quad \text{于 } \Omega_i \text{ 内}, \\ u_i|_{\Gamma_i}=\varphi, \\ u_i|_{\Gamma'_{ij}}=u_j, \quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ m,\ j\neq i, \end{cases} \tag{27}$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m.$$

其中 $\quad \operatorname{mes}\Gamma'_{ij}\leqslant \operatorname{mes}(\Gamma'_i\cap\Omega_j),\ \Gamma'_i=\bigcup\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\Gamma'_{ij},$

若 $\Gamma'_i\cap\Omega_j=0$, 则 Γ'_{ij} 为空集.

事实上, 若 u^* 是问题 (1) ~ (2) 的解, 则 u^* 必然满足问题集 (27), 即 u^* 是问题集 (27) 的解.

反之, 若 $u_1^*,\ u_2^*,\ \cdots, u_m^*$ 是问题集 (27) 的解, 在本章 § 1 我

们已经论证了当 $m=2$ 时,它们是问题(1)～(2)的解,作为例子,我们将反复利用这一证明思想,来论证当 $\Omega\subset R^2$, $m=3$ 时,它们也是问题(1)～(2)的解($m>3$时的情形可照此类推).

若 Ω 分裂为如图 6.4 所示的情形,对于问题集(27),我们特别地写出所有 Γ'_{ij} 的具体形式(还可以写成其他形式,但其论证方式与下面的类似):

$$\left.\begin{array}{ll}\Gamma'_{12}=\widehat{AFB}, & u_1^*|_{\Gamma'_{12}}=u_2^*;\\ \Gamma'_{13}=\widehat{BG}, & u_1^*|_{\Gamma'_{13}}=u_3^*;\end{array}\right\}\Gamma'_1=\Gamma'_{12}+\Gamma'_{13}=\widehat{AFBG}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\Gamma'_{21}=\widehat{ACB}, & u_2^*|_{\Gamma'_{21}}=u_1^*;\\ \Gamma'_{23}=\widehat{BE}, & u_2^*|_{\Gamma'_{23}}=u_3^*;\end{array}\right\}\Gamma'_2=\Gamma_{21}+\Gamma'_{23}=\widehat{ACBE}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\Gamma'_{31}=\widehat{CG}, & u_3^*|_{\Gamma'_{31}}=u_1^*;\\ \Gamma'_{32}=\widehat{EFC}, & u_3^*|_{\Gamma'_{32}}=u_2^*.\end{array}\right\}\Gamma'_3=\Gamma'_{31}+\Gamma'_{32}=\widehat{EFCG}$$

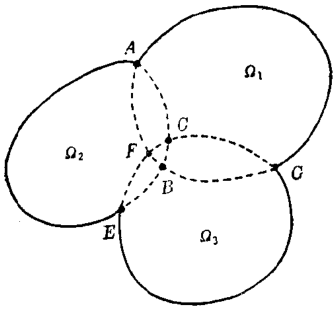


图 6.4

先考察区域 $\Omega_1\cup\Omega_2$ 上的情况,此处有

$$u_1^*|_{\Gamma'_{13}}=u_3^*,$$
$$u_2^*|_{\Gamma'_{23}}=u_3^*.$$

于是仿照 $m=2$ 时的论证方式,立即可知在 $\Omega_{12}=\Omega_1\cap\Omega_2$ 上成立

$$u_1^*=u_2^*.$$

类似地,对于 $\Omega_2\cup\Omega_3$ 上的情况,亦可推出在 $\Omega_{23}=\Omega_2\cap\Omega_3$ 上成立

$$u_2^*=u_3^*.$$

对于 $\Omega_1\cup\Omega_3$ 上的情况,考虑到上面已经得到的两个结果,可知在 $\Omega_{13}=\Omega_1\cap\Omega_3$ 上成立

$$u_1^* = u_3^*.$$

综合上面的三个结果，不难得知，在 $\Omega' = \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3$ 上成立

$$u_1^* = u_2^* = u_3^*.$$

于是可定义一个函数

$$u = \begin{cases} u_1, & 于\ \Omega_1\ 内; \\ u_2, & 于\ \Omega_2' = \Omega_2 - \Omega_2 \cap \Omega_1\ 内; \\ u_3, & 于\ \Omega_3' = \Omega - \Omega_1 \cup \Omega_2\ 内; \\ \varphi, & 于\ \Gamma\ 上. \end{cases}$$

令 $\varepsilon = u^* - u$, 不难得知, ε 满足问题

$$\begin{cases} A\varepsilon = 0, & 于\ \Omega_{12} \cup \Omega_{23} \cup \Omega_{31}\ 内, \\ \varepsilon|_\Gamma = 0, \\ \varepsilon|_{\Gamma'} = 0, & \Gamma' = \Gamma_1' \cup \Gamma_2' \cup \Gamma_3'. \end{cases}$$

故 $\varepsilon \equiv 0$，即 $u = u^*$. 也就证明了问题集 (27) 的解满足问题 (1) ~ (2). 对于高维情形也可类似地证明.

由此，类似本章 § 1，我们指出：

若由格式 I 得到的函数序列 $\{u^i\}_0^\infty$ 收敛于问题集 (27) 的解，则它也就是问题 (1) ~ (2) 的解；

格式 I 的广义解(在 Галеркин 意义下)即格式 II 的解，若由格式 II 得到的函数序列 $\{u^i\}_0^\infty$ 收敛于问题集 (27) 的广义解，则它也就是问题 (1) ~ (2) 的广义解；

当算子 A 对称时，格式 II 与格式 III 等价. 所以若由格式 III 得到的函数序列 $\{u^i\}_0^\infty$ 收敛于问题 (4) 的解，则它是问题 (1) ~ (2) 的广义解.

我们仍就格式 III 研究区域分裂法的收敛性. 先给出如下收敛性定理：

定理 6.4 若双线性形式 $a_\Omega(u, v)$ 于 $H_0^1(\Omega)$ 中连续且为一致椭圆，$f_\Omega(v)$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 中的连续线性泛函，则区域分裂法收敛，即 S_{III}-序列 $\{u^i\}_0^\infty$ 收敛到问题(4)的解 u^*(亦即问题(3)的解).

证明 (i) 首先证明序列 $\{J_\Omega(u^i)\}_0^\infty$ 是单调下降的;

由格式 III 及等式

$$J_\Omega(v)=J_{\Omega_j}(v)+J_{\Omega-\Omega_j}(v),\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m,$$

可推出，对任一 $j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$，都有

$$\begin{aligned}
J_\Omega(u^{mt+j}) &= J_{\Omega_j}(u^{mt+j})+J_{\Omega-\Omega_j}(u^{mt+j})\\
&= \inf_{v\in K_{mt+j-1}(\Gamma'_j)} J_{\Omega_j}(v)+J_{\Omega-\Omega_j}(u^{mt+j-1})\\
&\leqslant J_{\Omega_j}(u^{mt+j-1})+J_{\Omega-\Omega_j}(u^{mt+j-1})\\
&= J_\Omega(u^{mt+j-1})\\
&= J_{\Omega_{j-1}}(u^{mt+j-1})+J_{\Omega-\Omega_{j-1}}(u^{mt+j-1})\\
&= \inf_{v\in K_{mt+j-2}(\Gamma'_{j-1})} J_{\Omega_{j-1}}(v)+J_{\Omega-\Omega_{j-1}}(u^{mt+j-2})\\
&\leqslant J_{\Omega_{j-1}}(u^{mt+j-2})+J_{\Omega-\Omega_{j-1}}(u^{mt-j-2})\\
&= J_\Omega(u^{mt+j-2})\\
&\leqslant\cdots\leqslant J_\Omega(u^{mt+1})\leqslant J_\Omega(u^{mt})\leqslant\cdots\\
&\leqslant J_\Omega(u^{m(t-1)+j}),\quad t=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.
\end{aligned}$$

这表明序列 $\{J_\Omega(u^i)\}_0^\infty$ 是单调下降的.

(ii) 其次证明 $\{u^i-u^*\}_0^\infty$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有界;

仿照定理 6.1 证明中的(ii)即可得到这一结果. 因此从 $\{u^i-u^*\}_0^\infty$ 中可选出弱收敛的子序列 $\{u^i-u^*\}$ 使

$$u^{i_k}\to u\in H_\varphi^1(\Omega),\quad i_k\to\infty\text{ 时}. \tag{28}$$

(iii) 证明 $u=u^*$;

根据格式 II 与格式 III 的等价性可知

$$\begin{cases} u^i \in K_{i-1}(\Gamma'_j), \\ a_{\Omega j}(u^i, v) = f_{\Omega j}(v) \quad \forall v \in K^0(\Gamma'_j), \\ \qquad j = 1, 2, \cdots, m. \end{cases} \tag{29}$$

当 $i_k \to \infty$ 时，由(28)与(29)得

$$\begin{cases} u \in K(\Gamma'_j) \subset H^1_\varphi(\Omega), \\ a_{\Omega_j}(u, v) = f_\Omega(v) \quad \forall v \in K^0(\Gamma'_j), \\ \qquad j = 1, 2, \cdots, m. \end{cases} \tag{30}$$

(30)式说明 u 是格式 II 的解，亦即问题集(27)的广义解．即

$$u = u^*.$$

由(i)、(iii)与(28)式可得

$$\lim_{i \to \infty} J_\Omega(u^i) = J_\Omega(u^*). \tag{31}$$

(iv) 最后证明 $u^i \to u^*$（当 $i \to \infty$ 时）．

事实上，类似于(12)式，有

$$\|u^i - u^*\|_1^2 \leqslant \frac{2}{\gamma}[J_\Omega(u^i) - J_\Omega(u^*)].$$

利用(31)式立即可知 u^i 强收敛到 u^*．定理证毕．

下面我们介绍带松弛因子 ω 的所谓 S_ω-格式:

任给一初始猜测 $u^0 \in H^1_\varphi(\Omega)$，作 $S_{III\omega}$-序列 $\{u^i\}_0^\infty$:

$$1. \begin{cases} \hat{u}^{mt+1} = \{v \mid \inf\limits_{v \in K_{mt}(\Gamma'_1)} J_{\Omega_1}(v), \text{于 } \Omega_1 \text{ 内}, \\ \qquad\qquad v = u^{mt}, \text{于 } \Omega - \Omega_1 \text{ 上}\}, \\ u^{mt+1} = u^{mt} + \omega(\hat{u}^{mt+1} - u^{mt}); \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \hat{u}^{mt+2} = \{v \mid \inf\limits_{v \in K_{mt+1}(\Gamma'_2)} J_{\Omega_2}(v), \text{于 } \Omega_2 \text{ 内}, \\ \qquad\qquad v = u^{mt+1}, \text{于 } \Omega - \Omega_2 \text{ 上}\}, \\ u^{mt+2} = u^{mt+1} + \omega(\hat{u}^{mt+2} - u^{mt+1}); \end{cases}$$

$\vdots$

$$
\mathrm{m.}\begin{cases}\hat{u}^{mt+m}=\{v\mid \inf\limits_{v\in K_{mt+m-1}(\Gamma'_m)} J_{\Omega m}(v),\ 于\ \Omega_m\ 内,\\ \qquad\qquad v=u^{mt+m-1},\ 于\ \Omega-\Omega_m\ 上\},\\ u^{mt+m}=u^{mt+m-1}+\omega(\hat{u}^{mt+m}-u^{mt+m-1}).\end{cases}
$$

将定理 6.2 的证明平行推广到多子区域 $\Omega_j(j=1,\ 2,\cdots,\ m)$ 的情况. 同样可得到: 当 $0<\omega<2$ 时, 序列 $\{J_\Omega(u^i)\}_0^\infty$ 单调下降. 仿定理 6.4 的证明, 即可得如下带松弛因子 ω 的 $S_{III,\omega}$-格式的收敛性定理:

定理 6.5 在定理 6.4 的假设下, 若 $\omega\in(0,\ 2)$, 则带松弛因子 ω 的 $S_{III,\omega}$-格式收敛, 即 $S_{III,\omega}$-序列 $\{u^i\}_0^\infty$ 收敛到问题(4)的解 u^*.

当 $\omega\in(1,\ 2)$ 时, 我们称此算法为系统的 Schwarz 超松弛法, 简记为 S–SOR 算法. 类似地可构造出 $S_{I,\omega}$-格式与 $S_{II,\omega}$-格式, 皆可类似地证明其收敛性.

现在研究区域分裂法的误差估计. 为论证方便起见, 仅就格式 II 求得的第 i 步近似解 u^i 对问题 (3) 的精确解 u^* 的误差作出估计.

定理 6.6 若双线性形式 $a_\Omega(u,\ v)$ 于 $H_0^1(\Omega)$ 上连续且为一致椭圆, 则有

$$
\|u^*-u^i\|_1\leqslant C\inf_{v\in K_{i-1}(\Gamma'_j)}\|u^*-v\|_1 \qquad (32)
$$

$$
j\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ m\}.
$$

其中 $C>0$ 为与 u^* 和 i 都无关的常数.

证明 由 $a_\Omega(u,\ v)$ 的连续性知存在常数 $M>0$, 使得

$$
|a_\Omega(u,\ v)|\leqslant M\|u\|_1\|v\|_1,\ \forall u,\ v\in H_0^1(\Omega). \qquad (33)
$$

由格式 II 可知, $\{u^i\}_0^\infty$ 中的元素 u^i 应满足

$$
a_\Omega(u^i,\ \bar{v})=(f,\ \bar{v})_\Omega,\ \forall\bar{v}\in K^\circ(\Gamma'_j). \qquad (34)
$$

因 u^* 是问题(3)的解, 因此有

$$a_\Omega(u^*, \bar{v}) = (f, \bar{v})_\Omega, \ \forall \bar{v} \in K^\circ(\Gamma'_j). \tag{35}$$

因 $K^\circ(\Gamma'_j) \subset H_0^1(\Omega)$，故从(35)式减去(34)式得

$$a_\Omega(u_* - u^i, \bar{v}) = 0, \ \forall \bar{v} \in K^0(\Gamma'_j). \tag{36}$$

记 $v = \bar{v} + u^i$，于是 $v \in K_{i-1}(\Gamma'_j)$，由 $a_\Omega(u, v)$ 的一致椭圆性及考虑到(33)、(36)式，则可推得

$$\begin{aligned}
\|u^* - u^i\|_1^2 &\leqslant \frac{1}{\gamma} a_\Omega(u^* - u^i, u^* - u^i) \\
&= \frac{1}{\gamma}[a_\Omega(u^* - u^i, u^* - u^i) - a_\Omega(u^* - u^i, \bar{v})] \\
&= \frac{1}{\gamma} a_\Omega(u^* - u^i, u^* - v) \\
&\leqslant \frac{M}{\gamma}\|u^* - u^i\|_1 \|u^* - v\|_1, \ \forall v \in K_{i-1}(\Gamma'_j).
\end{aligned} \tag{37}$$

在(37)式中消去共同因子 $\|u^* - u^i\|_1$，并令 $C = \dfrac{M}{\gamma}$，得

$$\|u^* - u^i\|_1 \leqslant C\|u^* - v\|_1, \ \forall v \in K_{i-1}(\Gamma'_j).$$

上式两端关于 $v \in K_{i-1}(\Gamma'_j)$ 取下确界，即得(32)式. 定理证毕.

估计式(32)表明 S_H-序列 $\{u^i\}_0^\infty$ 对问题 (3) 的解 u^* 的逼近在 $\|\cdot\|_1$ 度量意义下每一步都是最佳的，并且这种逼近与算子 A 相应的双线性形式 $a_\Omega(u, v)$ 的性质有关. 影响收敛性的还有 $H_\varphi^1(\Omega)$ 中的元素 u^* 到其子集 $K_{i-1}(\Gamma'_j)$ 的距离，而 $K_{i-1}(\Gamma'_j)$ 又与 Γ'_j 有关，故其收敛性与拟边界 Γ'_j 的几何形状有关.

怎样选择 Γ'_j 以使算法收敛最快是一个值得探讨的问题，为了保证算法的收敛性，已知 Γ'_j 是不能取得与 Γ 相切的(在二维情形).

可以看出， 本章§2中的估计式(22)是估计式(32)的特殊情形.

§4 应用实例

作为对区域分裂法的应用，同时也为加深读者对它的理解，下面我们举一个用区域分裂法求解裂缝问题的实例.

应用力学中有一些领域涉及到在解域的局部区域内出现点奇异性和线奇异性的问题，这两种奇异性最普通的例子是线性和非线性断裂力学中的那些例子. 在 Poisson 方程和双调和方程的边值问题中，奇异性常常表现为边界包含凹隅角的情形，裂缝问题就是这种类型隅角的特殊情况. 在这种情况下，解通常在隅角处有奇异性，因为它的一些导数在隅角点处是无界的，所以在奇异点的邻域内会出现大的误差，通常的计算方法对它几乎是束手无策的. 近年来，不少人在用差分方法和有限元方法研究这个问题. 已出现了一些好的处理方法，其中包括局部网格加密，自适应格子优选，函数扩张和特殊单元构造等等[13]. 通观这些方法，都要大量增加计算量和程序的复杂性. 下面，我们采用上节所介绍的区域分裂法处理一个裂缝问题，与解通常的 Laplace 方程相比较，在几乎不增加工作量的情况下，得出了较高精度的数值解.

例[11]

$$\begin{cases} \Delta u=0 \quad 于\ \Omega=\{-1<x,\ y<1\}\setminus\{0<x<1,\ y=0\}, \\ u|_{\Gamma}=\dfrac{1}{2\pi}\theta \quad \Gamma\ 为\ \Omega\ 的边界(除[0,\ 1]外), \\ \left.\begin{aligned} u(x,\ 0_+)=0 \\ u(x,\ 0_-)=1 \end{aligned}\right\}\ 0<x\leqslant 1. \end{cases} \tag{38}$$

其中 θ 为边界点 P 至原点的连线 $\overline{OP}$ 与 x 轴的正向夹角(见图 6.5). 问题的精确解为

$$u(x,\ y)=\frac{1}{2\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

$u(x,\ y)$在凹隅角点O处不连续，且当点$P(x,\ y)$沿不同的射线趋向点$O(0,\ 0)$时，$u(x,\ y)$趋向不同的极限.

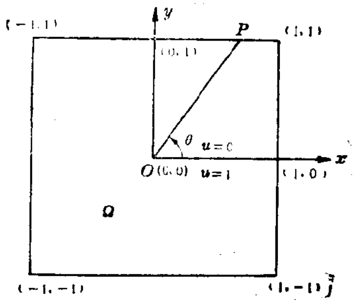


图 6.5

我们将区域分裂法与有限差分法结合起来，设计了如下计算方案：

(1) 将区域$\bar{\Omega}$分裂为三个有互相重叠部分的子区域$\bar{\Omega}_j(j=1,\ 2,\ 3)$：

$$\bar{\Omega}_1=\{-1\leqslant x\leqslant 1,\ -1\leqslant y\leqslant 0\};$$

$$\bar{\Omega}_2=\{-1\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\};$$

$$\bar{\Omega}_3=\{-1\leqslant x\leqslant 0,\ -1\leqslant y\leqslant 1\}.$$

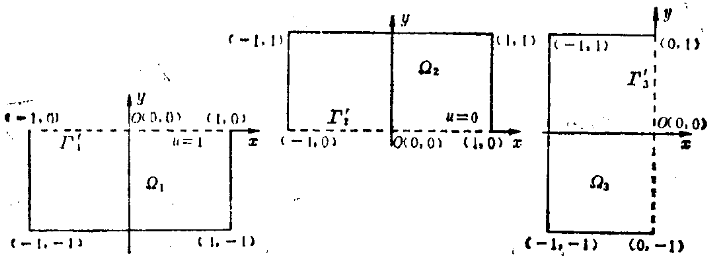


图 6.6

可以看出，这样分裂后，凹隅角点O处于各子区域的拟边界上，已成为直线边界点了；

(2) 在各子区域上进行正方形网格剖分，取步长$h=0.1$，每个子区域上有11×21个网点(包括o点)，Ω_1与Ω_3重

叠 11×11 个网点，Ω_2 与 Ω_3 重叠 11×11 个网点；

(3) 在每个子区域上均采用五点差分格式解算原问题. 利用边界条件与拟边界条件，导出 9×19 个未知量. 凹隅角点 o 的值取各自拟边界 $\Gamma'_j(j=1,\ 2,\ 3)$上邻近两网点值的算术平均；

(4) 用 S-SOR 格式进行松弛，取 $\omega=1.65$，误差限 $\varepsilon=10^{-5}$.

计算程序如下：

任给初始猜测 $u^0\in H^1_\varphi(\Omega)$，作 S_ω-序列 $\{u^i\}_0^\infty$：

Begin

  for $i:=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,$ **do**

 L: **for** $j=1,\ 2,\ 3$ **do**

  Begin

$$\hat{u}_h^{3i+j}=\{v_h\,|\,\Delta_h v_h=0,\text{于 }\Omega_j\text{ 内},\ v_h=u_h^{3i+j-1},\ \text{于 }\Omega-\Omega_j\text{ 上}\};$$

$$u_h^{3i+j}=u_h^{3i+j-1}+\omega(\hat{u}_h^{3i+j}-u_h^{3i+j-1});$$

   if $\|u_h^{i+1}-u_h^i\|_1>10^{-5}$ **then goto** L **else stop**

  end

end

我们对此例按照上述方案在 WUPP-80 分布式计算机上进行了计算，最后的结果给出：在 Ω_1 的边界奇异点处 $u_1(0,0)=0.75000$，在 Ω_2 的边界奇异点处 $u_2(0,0)=0.25000$，在 Ω_3 的边界奇异点处 $u_3(0,\ 0)=0.50000$. 而求得的近似解在 Ω 的所有网格点上与精确解重合到小数点后第 4 位. 这是我们目前所知道的关于这一问题的最好结果. 计算结果见下表：

表 6.2

0.3750	0.3574	0.3360	0.3106	0.2814	0.2500	0.2186	0.1894	0.1640	0.1426	0.1250
0.3926	0.3750	0.3525	0.3239	0.2891	0.2500	0.2109	0.1761	0.1475	0.1250	0.1074
0.4140	0.3975	0.3750	0.3437	0.3015	0.2500	0.1985	0.1563	0.1250	0.1025	0.0860
0.4394	0.4261	0.4063	0.3750	0.3244	0.2500	0.1756	0.1250	0.0937	0.0739	0.0606
0.4685	0.4609	0.4425	0.4256	0.3750	0.2500	0.1250	0.0744	0.0515	0.0391	0.0314
0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.25	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.5314	0.5391	0.5515	0.5744	0.6250	0.75 0.7500	1.0 0.8750	1.0 0.9256	1.0 0.9485	1.0 0.9609	1.0 0.9685
0.5606	0.5739	0.5937	0.6250	0.6756	0.7500	0.8243	0.8750	0.9063	0.9261	0.9394
0.5860	0.6025	0.6250	0.6563	0.9685	0.7500	0.8015	0.8437	0.8750	0.8975	0.9140
0.6074	0.6250	0.6475	0.6761	0.7109	0.7500	0.7891	0.8240	0.8525	0.8750	0.8926
0.6250	0.6426	0.6640	0.6894	0.7186	0.7500	0.7814	0.8106	0.8360	0.8574	0.8750

这里必须着重指出的是：1. 由于采用了区域分裂法，使得裂缝顶点（凹隅角 $\theta=2\pi$ 处）在子区域 $\Omega_j(j=1, 2, 3)$ 上已成为直线边界上的点（$\theta=\pi$ 处），即子区域变成凸区域了，这就为"边界光滑化"创造了条件；2. 在不同的子区域上允许函数在裂缝顶点上取不同的"边界值"，我们在这里是取其邻近网格点值的算术平均. 随着邻近网点值的不断松弛，裂缝顶点的值也在不断地变化（这正是区域分裂法的特点所在）.

可以预言，这种方法可能推广到其他带有类似边界间断性的问题上去.

§5 区域分裂混乱松弛法

我们在第 5 章已经看到，系统松弛可以推广成"混乱松弛"，即允许松弛的次序变化多样. 本节，我们也将取消区域分裂法中"系统松弛"的限制，而强调松弛次序的混乱性，以推广成所谓 S-CR (Schwarz chaotic relaxation) 算法与 S-COR (Schwarz chaotic overrelaxation) 算法.

先考察下面的迭代格式（仍以问题(1)～(2)为模型）：

任给一初始猜测 $u^0\in H^1_\varphi(\Omega)$，作 S_{III}-CR 序列 $\{u^{i(j)}\}_0^\infty$：

$$
\begin{cases}
u^{1(l)}=\{v\mid \inf\limits_{v\in K_0(\Gamma'_l)} J_{\Omega l}(v)，于\ \Omega_l\ 内，\ v=u^0, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 于\ \Omega-\Omega_l\ 上\}; \\
u^{2(k)}=\{v\mid \inf\limits_{v\in K_1(\Gamma'_k)} J_{\Omega k}(v)，\ 于\ \Omega_k\ 内，\ v=u^{1(l)}, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 于\ \Omega-\Omega_k\ 上\}; \\
\vdots \\
u^{i(j)}=\{v\mid \inf\limits_{v\in K^{i-1}(\Gamma'_j)} J_{\Omega j}(v)，\ 于\ \Omega_j\ 内，\ v=u^{i-1(s)}, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 于\ \Omega-\Omega_j\ 上\}; \\
\vdots
\end{cases}
$$

$$j,\ k,\ l,\ s\in M=\{1,\ 2,\ \cdots,\ m\},\ i=1,\ 2,\ \cdots.$$

类似本章§3中的说法，我们亦称上述格式为格式III. 还可构造出格式I和格式II，在问题(1)～(2)的解充分光滑的条件下，同样可证明三种格式是等价的。

格式III未对子区域的松弛次序作任何约定，其中$u^{i(j)}$的上标$i(j)$仅表示近似解$u^{i(j)}$是第i步由松弛第j个子区域而得到的.

前几节介绍的区域分裂法，都是按照事先给定的次序对所有子区域依次松弛一遍看作一个周期的，以后的松弛次序都是重复这个周期，所以都是一种系统松弛法. 但是我们刚才叙述的格式，既无子区域松弛的固定次序，更无周期可言！松弛过程只是唯一地与某个由迭代次数i和松弛子区域号j所确定的序列$\{i(j)\}_0^\infty$成一对一的映照.

我们把序列$\{i(j)\}_0^\infty$分成m个子序列:

$$\{i_1(1)\},\ \{i_2(2)\},\ \cdots,\ \{i_j(j)\},\ \cdots,\ \{i_m(m)\}. \tag{39}$$

一般说来，如果我们不对$\{i(j)\}_0^\infty$作任何限制，则当$i\to\infty$时，如同第5章§3中所指出的，上述子序列有的可能是无限集，有的可能是有限集，有的甚至可能是空集，但至少有一个是无限集，即标号$i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_j,\ \cdots,\ i_m$中至少有一个趋向无穷大，也就是说，如果不对松弛次序作任何限制，那么，当松弛运算无限次地继续下去时，有的子区域可能被无限次地松弛，有的可能只松弛有限次，有的甚至可能一次也轮不到，但至少有一个子区域被无限次地松弛.

需要着重指出的是：设某个子序列$\{i_r(r)\}(r\in M)$是有限集，这就意味着必存在$I=\max\{i_r(r)\}$，且当$i>I$时，$\{i(j)\}_I^\infty\cap\{i_r(r)\}=0$，也就是说，当松弛运算执行到第$I$步后，子区域$\Omega_r$就不再被松弛了，根据本章§3中对区域分裂

法所作的约定，推知至少有一个子区域 $\Omega_P(P\in M)$ 的拟边界 Γ'_P 当 $i>I$ 时会出现 $u^{i(P)}\big|_{\Gamma'_P\cap\Omega_r}=u^{I(r)}$ 为常驻值. 在这种情况下，对于不同的初始猜测 u^0，或者初始猜测虽同但松弛次序不同，我们都无法断定序列 $\{J_\Omega(u^{i(j)}\}_0^\infty$ 将收敛到相同的极限.

这样说来，最重要的问题就是：应给标号序列 $\{i(j)\}_0^\infty$ 施加怎样的限制才能足以保证序列 $\{J_\Omega(u^{i(j)})\}_0^\infty$ 对任一初始猜测 $u^0\in H^1_\varphi(\Omega)$ 都收敛到同一极限呢？作为回答，我们给出如下定义与定理：

定义 松弛格式 (38) 称为 Schwarz 混乱松弛法(S-CR 算法)，如果当 $i\to\infty$ 时，$i_j(j)\to\infty$, $\forall j\in M$.

定理 6.7 若双线性形式 $a_\Omega(u, v)$ 于 $H^1_0(\Omega)$ 中连续且为一致椭圆，$f_\Omega(v)$ 是 $H^1_0(\Omega)$ 中的连续线性泛函，则 S-CR 算法收敛，即 S_{III}-CR 序列 $\{u^{i(j)}\}_0^\infty$ 收敛于问题(4)的解 u^*(亦即问题(3)的解).

证明 (i) 当 $i\to\infty$ 时，序列 $\{J_\Omega(u^{i(j)}\}_0^\infty$ 单调下降；

根据 S_{III}-CR 算法的计算格式(38)及等式

$$J_\Omega(v)=J_{\Omega j}(v)+J_{\Omega-\Omega j}(v),\ \forall j\in M. \tag{40}$$

我们有

$$\begin{aligned}J_\Omega(u^{i(j)})&=J_{\Omega j}(u^{i(j)})+J_{\Omega-\Omega j}(u^{i(j)})\\&=J_{\Omega j}(u^{i(j)})+J_{\Omega-\Omega j}(u^{i-1(s)})\\&=\inf_{v\in K_{i-1}(\Gamma'_j)} J_{\Omega j}(v)+J_{\Omega-\Omega j}(u^{i-1(s)})\\&\leqslant J_{\Omega j}(u^{i-1(s)})+J_{\Omega-\Omega j}(u^{i-1(s)})\\&=J_\Omega(u^{i-1(s)}),\end{aligned} \tag{41}$$

$$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

这表明序列 $\{J_\Omega(u^{i(j)})\}_0^\infty$ 单调下降.

(ii) 仿照定理 6.4 证明中的(ii), 可以证明: 序列 $\{u^{i(j)}\}_0^\infty$ 中存在一个子序列 $\{u^{i_k(j)}\}_0^\infty$ 弱收敛于 $u\in H_\varphi^1(\Omega)$;

(iii) 在条件: 当 $i\to\infty$ 时, $i_j(j)\to\infty$, $\forall j\in M$ 之下, 可知序列 $\{u^{i_j(j)}\}$ 的上标 $i_j(j)\to\infty$. 因此, 仿照 (ii) 的证明思想, 亦可知$\{u^{i_j(i)}\}$中存在子序列$\{u^{i_{jk}(j)}\}$弱收敛到 $u_j\in K_j(u_i)$, 即

$$u^{i_{jk}(j)}\to u_j\in K_j(u_i), \text{于 } \Omega_j \text{ 内}, \forall j\in M.$$

其中

$$K_j(u_i)=\{v\,|\,v\in H_\varphi^1(\Omega),\ v|\Gamma_{ji}=u_i|\Gamma_{ji},\\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m,\ j\neq i\}.$$

而且 u_j 为 u 在子区域 Ω_j 内的限制, 即

$$u_j=u, \text{于 } \Omega_j \text{ 内}, \forall j\in M. \tag{42}$$

(iv) 仿照定理 6.4 证明中的(iii), 可知

$$u=u^*.$$

而且有

$$\lim_{i_k(j)\to\infty} J_\Omega(u^{i_k(j)})=J_\Omega(u^*). \tag{43}$$

(v) 最后仿照定理 6.4 证明中的(iv), 即可得到:

$$u^{i(j)}\to u^*.$$

定理证毕.

容易看出, S—算法是 S-CR 算法的特例. 事实上, 在 S—算法中, 对每一个 $j\in M$, 都有:

$$i_j(j)=\frac{i-j}{m}=\frac{mt+j-j}{m}=t,$$

显然, 当 $mt+j\to\infty$ 时, $t\to\infty$, $\forall j\in M$. 从而说明它符合 S-CR 算法的定义.

用与定理 6.6 类似的证明思想, 也可得到 S-CR 算法的

误差估计:

定理 6.8 在定理 6.7 的条件之下, 下式成立:

$$\|u^{i(j)}-u^*\|_1\leqslant C\inf_{v\in K_{i-1}(\Gamma'_j)}\|v-u^*\|_1. \tag{44}$$

其中 $C>0$ 是与 u^* 和 i 都无关的常数.

于 S-CR 算法中引入松弛因子 ω, 便成为 S-COR 算法:

任给初始猜测 $u^0\in H_\varphi^1(\Omega)$, 作序列 $\{u^{i(j)}\}_0^\infty$:

$$\hat{u}^{i(j)}=\{v|\inf_{v\in K_{i-1}(\Gamma'_j)}J_{\Omega j}(v), 于 \Omega_j 内; v=u^{i-1(s)}, 于 \Omega-\Omega_j 上\};$$

$$u^{i(j)}=u^{i-1(s)}+\omega(\hat{u}^{i(j)}-u^{i-1(s)});$$

$$j, s\in M, i=1, 2, \cdots.$$

仿照定理 6.7 的证明思想, 也可得到 S-COR 算法的收敛性定理:

定理 6.9 在定理 6.7 的条件之下, S-COR 算法收敛, 即 $S_{II,\omega}$-序列 $\{u^{i(j)}\}_0^\infty$ 收敛到问题(4)的解 u^*.

当 $\omega\in(1, 2)$时, 称之为区域分裂混乱超松弛法. 解椭圆型方程时, 一般采用超松弛因子. 当 $\omega=1$ 时, 它就是 S-CR 算法, 因此, 本章的所有收敛性定理, 都可看作定理 6.9 的特例.

作为本节的结束, 我们举一个颇具特色的计算实例.

例[68]

$$\begin{cases}\Delta u=0 & 于 \Omega,\\ u|\Gamma_1=\dfrac{1}{2}(x^2-y^2),\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}+2u=2(x^2-y^2) & 于 \Gamma_2.\end{cases}$$

其中 Ω 的形状见图 6.7, Γ_2 是以原点为圆心半径等于 1 的圆上从点(0, 1)到点(0.8, 0.6)的一段弧, $\Gamma_1+\Gamma_2=\Gamma$ 是 Ω 的

边界，n 是 Γ_2 的外法线方向. 问题的精确解

$$u=\frac{1}{2}(x^2-y^2).$$

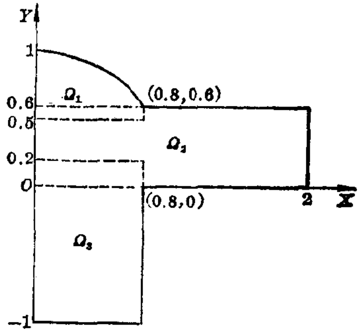


图 6.7

根据 Ω 的形状特点，把它分为三个具有重叠部分的子区域 Ω_1, Ω_2, Ω_3(参见图 6.7). 在子区域 Ω_1 上采用有限元法离散，在 Ω_2 与 Ω_3 上均采用五点差分格式离散. Ω_1 与 Ω_2 之间重叠一层网格，Ω_2 与 Ω_3 之间重叠两层网格. Ω_1 上采用三角单元，取线性位移函数，三角单元最大边长为 0.15，在 Ω_2 与 Ω_3 上均采用正方形网格，步长 $h=0.1$. 因此 Ω_1 上形成 37 阶线性方程组，Ω_2 上形成 41 阶线性方程组，Ω_3 上形成 35 阶线性方程组. 对整个系统采用 S-CR 算法求解、三个子区域上均采用松弛法求解各自的线代数方程组，内迭代次数取为 1. 用 WUPP-80 系统的三台处理机各负责松弛一个子区域，并用 $E=\sum_{j=1}^{3}\varepsilon_j\leqslant\varepsilon=10^{-4}$ 作为汇合控制，对于初值 $u^0=0$，计算结果迅速收敛.

由于离散方法与子区域的大小不同，各处理机完成一次迭代所需要的时间不会相等．计算过程中显示的信息表明松弛过程是混乱的．三台处理机同时结束时，分别作过38、40和41次迭代．表6.3列出了本算法得到的一些结点上的数值 u_i 与相应的精确解 u_i^* 可供比较，其中前四行属于 Ω_1 与 Ω_2 的重叠部分，后四行属于 Ω_2 与 Ω_3 的重叠部分．

表 6.3

i	x_i	y_i	u_i	u_i^*	$u_i^*-u_i$
1	0.30000	0.60000	−0.13507	−0.13500	0.00007
2	0.40000	0.60000	−0.10011	−0.10000	0.00011
3	0.30000	0.50000	−0.08005	−0.08000	0.00005
4	0.40000	0.50000	−0.04508	−0.04500	0.00008
5	0.30000	0.20000	0.02497	0.02500	0.00003
6	0.40000	0.20000	0.05996	0.06000	0.00004
7	0.30000	0.10000	0.03998	0.04000	0.00002
8	0.40000	0.10000	0.07497	0.07500	0.00003

这个例子虽然很简单，却体现了算法对于处理复杂区域的极大灵活性与优越性．

上例最终都是让每一台处理机解一个子区域上的(有限差分或有限元)离散化线代数方程组，这本质上就是广义的矩阵分裂法．

这个例子还显示了S-CR算法的一些特点，那就是，除了松弛次序的混乱外，在各个子区域上还可以分别采取不同的离散方式：既可采用有限元方法也可采用有限差分方法或其他方法．而且求解离散方程组也可以各自采用不同的方法；有的子区域上可采用直接法，有的子区域上可采用各种类型的迭代方法(松弛法、共轭斜量法以及将要在第8章介绍的多层

网格法等). 这种离散方式与离散方程解法的任意性, 是区域分裂法优于其他处理方式的重要一点. 这就为计算工作者提供了根据问题的特点在更广的范围选择合适的离散方式与解法的方便, 区域分裂法保证了这种任意选择的收敛性. 事实上, 我们对区域分裂法收敛性的证明, 未对离散方式与离散方程的解法作任何限制.

最后, 我们再作几点重要注记:

一、对线性偏微分方程而言, 当求解区域分裂成若干个有重叠部分的子区域所相应的问题集离散化后, 所得到的线性代数方程组就对应着原问题离散化得到的线性代数方程组的一种广义矩阵分裂法(如果离散化方法相同的话). 因此第5章介绍的B-算法就是一种特殊区域分裂方式(链条式的分裂)下Schwarz型算法的离散化形式. 但Schwarz型算法的离散化形式远比第5章介绍的矩阵分裂法复杂.

二、现有的解离散化后椭圆型方程的各种迭代方法几乎都可看作Schwarz型算法的离散化形式的特例, 包括逐块松弛法、红黑松弛法、交替方向法等等.

三、由于$K^0(\Gamma'_j)$是$H_0^1(\Omega)$的一个无穷维子空间, 所以Schwarz型算法本质上不同于Ritz-Галеркин型的近似方法.

四、由于子区域个数m没有一定的限制, 并顾及到松弛顺序的混乱性, 则可认为区域分裂的方式在某种程度上是可随迭代次数而变化的. 对Schwarz型算法的这种认识在研制"自适应软件"时有极大的好处.

五、这类算法既适用于串行计算机, 更适用于并行多处理机系统. 由于将整个求解区域分裂成了m个带有重叠部分的子区域, 求解每个子区域上的子问题可对应一个进程, 因而

S-OR 算法是m个并发进程的集合. 这些进程同时协同地工作以解算给定的问题，进程之间只进行少量的通讯，如传送拟边界近似值和误差信息，一般不需要彼此等待. 这类算法符合文献 [8]、[53]～[56] 给出的异步并行算法的定义. 文献[68]不仅对此作了理论的阐述，而且用大量的数值实例作了验证.

第 7 章

解非线性问题的区域分裂法

本章，我们力图把前一章的区域分裂法的理论与算法推广到求解非线性椭圆型微分方程，将求解一类弱非线性和完全非线性的椭圆边值问题的数值方法与S—算法结合起来，构造出相应的几种计算格式.

§1 解一类弱非线性椭圆边值问题的 P-S 算法与 N-S 算法

我们选择具有代表性的一类弱非线性齐次边值问题来讨论. 考虑问题:

$$\begin{cases} Au=f(x,\ u) \quad 于\ \Omega, & (1)\\ u|_{\Gamma}=0, & (2)\end{cases}$$

其中 $\Omega\subset R^n$ 为一有界区域，它的边界 Γ 足够光滑. A 为二阶线性偏微分算子:

$$Au=-\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+B(x)u,$$

A 于 $\overline{\Omega}$ 上一致椭圆，函数 $A_{ik}(x)$, $B(x)\in C^1(\overline{\Omega})$，并且 $\{A_{ik}(x)\}$ 为对称矩阵. 此外，还假定 $f\in C(\overline{\Omega}\times R,\ R)$，且存在常数 $M>0$，使得

$$|f(x,\ Z)|\leqslant M,\ \forall x\in\overline{\Omega},\ Z\in R. \tag{3}$$

我们的目的在于求(1)～(2)的弱解(广义解)，即

$$\begin{cases} \text{求 } u \in H_0^1(\Omega), \text{使得} \\ a(u, v) = (f(u), v), \ \forall v \in C_0^\infty(\Omega). \end{cases} \tag{4}$$

当条件(3)成立时，(4)式右端恒有意义，它连同关于(1)～(2)的一般定理一起还指出了问题(1)～(2)的弱解 u 具有 Hölder 连续的一阶导数，并且如果 f 也是 Hölder 连续的，则 u 即问题(1)～(2)的古典解.

进一步假设 A 有一零空间 $N(A)$，它由函数序列 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\cdots$, $\varphi_p(x)$ 张成，又设 f 还满足下述两个条件之一：

若 $F(x, z) = \int_0^z f(x, t)\mathrm{d}t$ 则当

$$|\alpha| = \left(\sum_{i=1}^{P} \alpha_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \to \infty \text{ 时},$$

$$\int_\Omega F\left(x, \sum_{i=1}^{P} \alpha_i \varphi_i(x)\right)\mathrm{d}x \to \begin{cases} +\infty \text{ 或} \\ -\infty. \end{cases}$$

在上述诸假设之下，Ahmed 等已证明问题(1)～(2)至少存在一弱解[12].

对于 $u \in H_0^1(\Omega)$，定义

$$J_\Omega^*(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - (f(u), u).$$

由 f 的假设条件，还可指出 $J_\Omega^*(u) \in C^1(H_0^1(\Omega), R)$.

记

$$J_\Omega^i(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - (f(u_i), v),$$

其中 u_i 为 $H_0^1(\Omega)$ 中的一确定点.

求解问题(4)一般分为两步，第一步是将问题线性化. 通常采用的是 Picard 方法与 Newton 方法.

我们先讨论 Picard 线性化方法.

对于问题(4)，Picard 线性方法可表述如下：

任给初始猜测 $u_0\in H_0^1(\Omega)$，作 P-序列 $\{u_i\}_0^\infty$：

$$\begin{cases}\text{求 } u_{i+1}\in H_0^1(\Omega)\text{，使得}\\ a(u_{i+1},\ v)=(f(x,\ u_i),\ v)\qquad \forall v\in H_0^1(\Omega),\end{cases}\tag{4'}$$

$$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

若线性泛函 $(f(x,\ u_i),\ v)$ 连续，则由 Lax-Milgram 定理知 (4′) 之解存在且唯一，故 P-序列 $\{u_i\}_0^\infty$ 存在，若它收敛，则可得问题 (4) 之解.

对于每一固定的 i，问题 (4′) 已成为线性边值问题，即第 6 章 § 1 中的问题 (3). 它等价于问题

$$\begin{aligned}&\text{求 } u_{i+1}\in H_0^1(\Omega)\text{，使得}\\ &J_\Omega^i(u_{i+1})=\inf_{v\in H_0^1(\Omega)} J_\Omega^i(v).\end{aligned}\tag{5}$$

这样，第二步工作就是对 $i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ 解一系列线性问题 (5) 亦即问题 (4′). 若序列 $\{u_i\}_0^\infty$ 收敛，则它必收敛于问题 (4) 的解. 因此，将 Picard 算法与 S 算法联合起来构成的算法，可用来求解问题 (4)，不管它的解是否唯一.

现在叙述 Picard-S 算法（简记为 P-S 算法）：

给一初始猜测 $u_0\in H_0^1(\Omega)$ 及正整数 I，并记 $u_0^{1(0)}=u_0$，作 P-S 序列 $\{u_i\}_0^\infty$：

1) $u_i^{l(j)}=\{v\ \inf\limits_{v\in K(i,j,l)} J_{\Omega_j}^i(v)$，于 Ω_j 内，

$$v=u_i^{l(j-1)}\text{，于 } \Omega-\Omega_j \text{ 上，}$$

$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ m,$$

$$u_i^{l+1}=u_i^{l+1(0)}=u_i^{l(m)},$$

$$l=1,\ 2,\ \cdots,\ I;$$

2) $u_{i+1}=u_i^I$，

$$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

其中 m 为子区域个数，I 为对每一固定的 i 作 S-型松弛的次

数，称为内迭代次数，而称i为外迭代次数. 函数类$K(i, j, l)$定义为

$$K(i, j, l)=\{v \mid v\in H_0^1(\Omega),\ v=u_i^{l(j-1)}\text{于 } \Gamma'_j \text{ 上}.$$

如果将 Picard 算法与带松弛因子的区域分裂法联合使用，则可得所谓 P—S_ω 算法，叙述如下：

给一初始猜测$u_0\in H_0^1(\Omega)$及正整数I，并记$u_0^{1(0)}=u_0$，作 P—S_ω 序列$\{u_i\}_0^\infty$：

1) $\hat{u}_i^{(j)}=\{v \mid \inf\limits_{v\in K(i,j,l)} J(v)$，于$\Omega_j$内，

$$v=u_i^{l(j-1)},\ \text{于 } \Omega-\Omega_j \text{ 上}\},$$

$$u_i^{(j)}=u_i^{l(j-1)}+\omega(\hat{u}_i^{l(j)}-u_i^{l(j-1)}),$$

$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ m,$$

$$u_i^{l+1}=u_i^{l+1(0)}=u_i^{l(m)},$$

$$l=1,\ 2,\ \cdots,\ I;$$

2) $u_{i+1}=u_i^I$,

$$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

Newton 线性化方法可表述如下：

首先我们记

$$Au-f(x,\ u)\equiv Pu.$$

于是(1)可写成算子方程

$$Pu=0. \tag{6}$$

其中P定义在$H_0^1(\Omega)$的开集B上.

若P于B的某一闭子集(例如$S_r=\{v \mid \|v-u_0\|\leqslant r\}$上 Frèchet 可导，则解(6)的 Newton 方法可表述为：

给一初始猜测$u_0\in S_r$，作N—序列$\{u_i\}_0^\infty$：

$$P'(u_i)(u_{i+1}-u_i)=-Pu_i, \tag{7}$$

$$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

设$\{u_i\}_0^\infty\subset S_r$，此时(7)有意义．事实上

$$P'(u_i)=A-f'_u(x,\ u_i) \tag{8}$$

是 Newton 线性化算子．

如果$(P'(u_i))^{-1}$对任何给定的$i\in N=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$都存在，那么(7)可解，即可以由它产生 N—序列$\{u_i\}_0^\infty$．若进一步假设

$$\begin{cases}\|Pu_0\|\leqslant\eta,\\ \|(P'(u))^{-1}\|\leqslant G,\ \ \|P''(u)\|\leqslant K \quad \forall u\in S_r,\\ h=G^2K\eta<2,\ \ r>G\eta\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\dfrac{h}{2}\right)^{2^i-1}.\end{cases}$$

则由 Мысовских 定理[22]，可知以u_0为初始猜测的 N—序列$\{u_i\}_0^\infty$收敛于(6)的解$u\in S_r$，并且有敛速估计

$$\|u-u_i\|\leqslant G\eta\left(\frac{h}{2}\right)^{2^i-1}\bigg/\left[1-\left(\frac{h}{2}\right)^{2^i}\right].$$

现在来讨论由(7)、(8)所得到的线性问题集：

$$\begin{cases}[A-f'_u(x,\ u_i)]_{u_{i+1}}=f(x,\ u_i)-f'_u(x,\ u_i)u_i \\ \quad 于\ \Omega\ 内, \end{cases} \tag{9}$$

$$u_{i+1}|_\Gamma=0, \tag{10}$$

$$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

它是边值问题(1)～(2)的 Newton 线性化的结果．记算子$[A-f'_u(x,\ u_i)]$相应的双线性形式为$\bar{a}^i(u,\ v)$，即

$$\bar{a}^i(u,\ v)=a(u,\ v)-(f'_u(u_i)u,\ v).$$

又记
$$(\bar{f}_i,\ v)=(f(u_i)-f'_u(u_i)u_i,\ v).$$

为了保证对任意的$i\in N$问题(9)～(10)的弱解存在且唯一，我们还设$\bar{a}^i(u,\ v)$连续且一致椭圆于$H_0^1(\Omega)$，$(\bar{f}_i,\ v)$关于v是$H_0^1(\Omega)$上的连续线性泛函．

解问题(1)～(2)的 Newton 法可表述如下：

给一初始猜测$u_0\in H_0^1(\Omega)$，作 N—序列$\{u_i\}_0^\infty$：

$$\begin{cases} 求\ u_{i+1} \in H_0^1(\Omega), 使 \\ \bar{a}^i(u_{i+1}, v) = (\bar{f}_i, v), \ \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{11}$$

$$i=0, 1, 2, \cdots.$$

记
$$\bar{J}_\Omega^i(v) = \frac{1}{2}\bar{a}^i(v, v) - (\bar{f}_i, v).$$

若 $\bar{a}^i(u, v) = \bar{a}^i(v, u)$，则(11)等价于

$$\begin{cases} 求\ u_{i+1} \in H_0^1(\Omega), 使 \\ \bar{J}_\Omega^i(u_{i+1}) = \inf\limits_{v \in H_0^1(\Omega)} \bar{J}_\Omega^i(v). \end{cases} \tag{12}$$

N. L. Schryer[23] 曾用带松弛因子的 Newton 法解这一类问题，并证明了当 $f'_u(x, u) \leqslant 0$ 时，他的线性化迭代格式具有整体二阶敛速.

于算法(11)中引入松弛因子 μ_i 使之成为 N_μ—算法:

给一初始猜测 $u_0 \in H_0^1(\Omega)$，作 N_μ–S 序列 $\{u_i\}_0^\infty$:

$$\begin{cases} 求\ \bar{u}_{i+1} \in H_0^1(\Omega), 使 \\ \bar{a}^i(\bar{u}_{i+1}, v) = (\bar{f}_i, v), \ \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ u_{i+1} = u_i + \mu_i(\bar{u}_{i+1} - \mu_i), \end{cases} \tag{13}$$

$$i=0, 1, 2, \cdots.$$

这便是带松弛因子的 Newton 法. 其中 μ_i 的选取依赖于算子 A 与函数 $f(x, u)$ 的性质. 根据 Schryer 的数值试验，若 $f(x, u)$ 单调上升，则开始几步取 $\mu_i \in (0, 1)$（即低松弛），往后就过渡到完全松弛（$\mu_i = 1$）. 王烈衡[24] 把这类算法推广到解更一般的非线性椭圆边值问题.

(13)的等价算法是

$$\begin{cases} 求\ \bar{u}_{i+1} \in H_0^1(\Omega), 使 \\ \bar{J}_\Omega^i(\bar{u}_{i+1}) = \inf\limits_{v \in H_0^1(\Omega)} \bar{J}_\Omega^i(v), \\ u_{i+1} = u_i + \mu_i(\bar{u}_{i+1} - u_i), \end{cases} \tag{14}$$

$$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

若将算法(12)与S—算法联合使用，即以

$$\bar{J}^i_{\Omega_j}(v)=\frac{1}{2}\bar{a}^i_{\Omega_j}(v,\ v)-(\bar{f}_i,v)_{\Omega_j}$$

$$=J^i_{\Omega_j}(v)-\frac{1}{2}(f'_u(u_i)v,\ v)_{\Omega_j}+(f'_u(u_i)u_i,\ v)_{\Omega_j}$$

代替P—S算法中的$J^i_{\Omega_j}(v)$，便得到Newton-Schwarz算法(简称N—S算法). 同样地，将算法(14)与S—算法联合使用，就构成了N_μ—S算法：

给一初始猜测$u_0\in H^1_0(\Omega)$及正整数I，并记$u_0^{1(0)}=u_0$，作N_μ—S序列$\{u_i\}_0^\infty$：

1) $\bar{u}_i^{l(j)}=\{v|\inf\limits_{v\in\bar{K}(i,j,l)}\bar{J}^i_{\Omega_j}(v)$，于$\Omega_j$内，

$$v=\bar{u}_i^{l(j-1)}，于\ \Omega-\Omega_j\ 上\},$$

$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ m,$$

$\bar{u}_i^{l+1(0)}=\bar{u}_i^{l(m)}$,

$$l=1,\ 2,\ \cdots,\ I,$$

$\bar{u}_{i+1}=\bar{u}_i^{I(m)}$;

2) $u_{i+1}=u_i+\mu_i(\bar{u}_{i+1}-u_i)$,

$u_{i+1}^{1(0)}=u_{i+1}$,

$$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

其中

$$\bar{K}(i,\ j,\ l)=\{v|v\in H^1_0(\Omega),\ v=\bar{u}_i^{l(j-1)}，于\ \Gamma'_j\ 上\}.$$

当$\mu=1$时，N_1—S算法就是N—S算法.

有些非线性偏微分方程的问题离散化后产生的非线性方程组也可应用上述算法求解. 作为上述算法的特例，可参看王德人、冯果忱、L. A. Hageman与T. A. prosching等人的著作[26]、[27]、[25].

§ 2 P-S-COR 算法与 N_μ-S-COR 算法

本节将混乱松弛的思想引入 P—S 算法与 N_μ—S 算法，从而得到 P—S—COR 算法与 N_μ—S—COR 算法.

1. P—S—COR 算法

给定初始猜测 $u(0)\in H_0^1(\Omega)$ 及正整数 I，作 P—S—COR 序列 $\{u(i)\}_0^\infty$. 如下:

1) 取 $u_j^1(0)=u(0)$, $\forall j\in M=\{1, 2, \cdots, m\}$;

2) $u_j^{l(j)k}(i)=\{v|\inf\limits_{v\in K(i,j,l(g)t)} J_{\Omega j}^i$, 于 Ω_j 内,

$$v=u_g^{l(g)t}(i), \text{于 } \Omega-\Omega_j \text{ 上}\},$$

其中

$$l(j)k=l+k/n,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n_j,\ n_j\in N=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\},$$

$g\in M$, $\forall j\in M$. (g、t、n_j 均是服从某种分布的随机变量).

$$u^{l+1}(i)=u_s^{l(s)1},\ u_j^l(i)=u^l(i), \text{固定 } S\in M.$$

$$l=1,\ 2,\ \cdots,\ I;$$

3) $u(i+1)=u^I(i)$, $i=0, 1, 2, \cdots$.

其中 $$K(i,\ j,\ l(g)t)=\{v|v=H_0^1,$$

$$v=u_j^{l(j)\bar{k}}(i)+\omega(u_g^{l(g)t}(i)-u_j^{l(j)\bar{k}}(i)) \text{于 } \Gamma_j' \text{ 上}\},$$

上式中随机变量 $\bar{k}\in[0,\ k)$.

为了保证上述算法构成混乱松弛法，我们必须对出现在算法中的 n、S 等整数作些规定.

由于对所有的 $j\in M$，上述算法均有意义. 实际上，它定义了 m 个进程 $P_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 的集合，这 m 个进程可以同时地协作地在某计算机系统上运行. 分数上标 $l(j)k$ 用来描述内松弛过程，k 记内松弛次数. 由于区域分裂的方式及分裂后各子问题处理的方法各不相同等原因，各进程的算法

复杂性也不同，因而各进程执行的松弛速度也不同．设进程 P_j 每秒钟进行内松弛的次数为 f_j．S 定义如下：

$$f_s=\min_{1\leq j\leq m} f_j,$$

即第 S 个进程 P_s 为进行松弛最慢的进程．记

$$n_j=[f_j/f_s].$$

符号 $[x]$ 表示取大于 x 的最小整数．记

$$n=\max_{1\leq j\leq m} n_j.$$

S 与 n 可能随外松弛次数 i 而变化．定义了 S 就决定了抽样组成 $\{u(i)\}_0^\infty$ 的方式．

若 $f_1=f_2=\cdots=f_m$，这时有 $n=1$，则 m 个进程同步．

注 1 计算 $u_j^{l(j)k}(i)$ 时，我们总是假定 $u_g^{l(g)t}(i)$ 是已经计算好了的，尽管 $l(j)k$ 可能小于 $l(g)t$．

注 2 g 的一个合理选择是，在注 1 条件下选取最新计算的那个解为拟边界值．程序中可以这样来实现：当计算好 $u_j^{l(j)k}(i)$ 之后，随即将它在 Γ_i' 处的值传送给 Ω_i 作为它的拟边界值 $u_i|_{\Gamma_i'}$（如果 $\Gamma_i'\subset\Omega_j$），这样可以达到最经济的存贮与最好的敛速．

注 3 正整数 I 为控制内迭代次数的参数，它决定着收敛性抽样检验的频率，亦即构成 $\{u(i)\}_0^\infty$ 的方式．I 也可取为外迭代次数 i 的函数．例如，迭代初期可取 I 与 i 成正比，当 i 较大（例如 $i\geq 10$）之后就固定 I．

注 4 n_j 是与 P_j 之间的相对算法复杂性有关的．最合理的分配计算任务的方案是使 m 个进程的算法复杂性大致相等，即要使 n 尽可能小．

注 5 松弛因子 ω 的选取要由 $J_D'(v)$ 的性质来决定．通常取 $\omega\in(1,\ 2)$，即超松弛．

2. N_μ-S-COR 算法

给定初始猜测 $u(0)\in H_0^1(\Omega)$ 及正整数 I，作 N_μ-S-COR 序列 $\{u(i)\}_0^\infty$ 如下:

1) 取 $\bar{u}_j^1(0)=u(0)$, $\forall_j\in M$;

2) $\bar{u}_j^{l(j)k}(i)=\{v|\inf\limits_{v\in\bar{K}(i,j,l(g)t)} J_{\Omega_j}^i(v)$，于 Ω_j 内，

$$v=\bar{u}_g^{l(g)t}(i)\text{，于 }\Omega-\Omega_j\text{ 上}\},$$

$$l(j)k=l+k/n,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n_j,$$

$$n_j\in N,\ g\in M,$$

$$\bar{u}^{l+1}(i)=\bar{u}_s^{l(s)1}(i),\ \bar{u}_j^1(i)=\bar{u}^l(i),$$

$$l=1,\ 2,\ \cdots,\ I,\ S\in M;$$

3) $u(i+1)=u(i)+\mu(\bar{u}^I(i)-u(i))$,

$$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

注 1 其中某些符号的意义与 P-S-COR 算法中相同符号的意义相同.

注 2 关于 P-S-COR 算法的所有附注在此照样适用.

注 3 外松弛因子 μ 的选取是与算子 P 的性质有关，当 $f(x.\ u)$ 关于 $u(\forall x\in\Omega)$ 为单调下降函数时，通常取 $\mu\leqslant 1$，即取低松弛.

我们在具有四台处理机(四个并行进程)的 WUPP-80 系统上，用上述两个算法对弱非线性椭圆边值问题

$$\begin{cases}\Delta u=f(x,\ u)\text{于 }\Omega\text{ 内}, & (15)\\ u|_\Gamma=\varphi, & (16)\end{cases}$$

进行了大量的模拟试验，其中包括:

1° $\Delta u=e^u$(气体动力学);

2° $\Delta u=e^u-1$(固体物理);

3° $\Delta u=u^2$(化学扩散);

4° $\Delta u = u/(u+k)$　$k>0$ 为常数(酶的扩散)；

5° $\Delta u = u^4$(辐射冷却)；

6° $\Delta u = \operatorname{sh} u$(物理化学：燃料电池)；

7° $\Delta u = -\lambda^2 \sin u$(摆动的推广形式)；

8° $\Delta u = -\lambda^2(1-\beta-u)e^{\alpha(u-1)/u}$　α、β 为参数(Arrhenius 动力反应——扩散系统).

它们带有各种不同的边界条件，有的问题十分典型而且相当复杂(例如 3°)，有的还是分歧问题(例如 7°、8°).

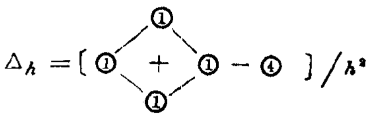
关于这些例子的数值试验情况，文献[11]、[17]～[19]作了详细的总结，下面仅选出用 P-S-COR 算法与 N_μ-S-COR 算法计算例 3° 的情况来叙述. 对问题

$$\begin{cases} \Delta u = u^2 \quad 于\ \Omega\ 内 & (17) \\ u|_\Gamma = \varphi & (18) \end{cases}$$

的数值试验设计如下：

1) 区域 $\Omega = \{(x, y) \mid 0<x, y<2\}$

2) 取步长 $\Delta x = \Delta y = h = 2/13$，用五点差分算子



将方程(17)离散成

$$\Delta_h u_{ij} = u_{ij}^2.$$

3) 将 $\overline{\Omega}$ 分裂为四个互相重叠的子区域：

$$\begin{cases} \overline{\Omega}_1 = \{(x, y) \mid 0\leqslant x\leqslant 7h,\ 6h\leqslant y\leqslant 2\}, \\ \overline{\Omega}_2 = \{(x, y) \mid 0\leqslant x,\ y\leqslant 7h\}, \\ \overline{\Omega}_3 = \{(x, y) \mid 6h\leqslant x,\ y\leqslant 2\}, \\ \overline{\Omega}_4 = \{(x, y) \mid 6h\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant 7h\}. \end{cases}$$

4) 以 $\varepsilon=10^{-5}$ 控制前后两次迭代误差.

此例着重试验不同的边界条件和不同的初始猜测与算法的收敛性之间的关系. 试验结果分别叙述如下:

I. 用 P-S-COR 算法计算了 90 例. 子问题用逐线完全松弛法, 边界松弛因子 $\omega=1.35$. 数值结果表明, 问题是局部收敛的, 在其收敛范围内, 总得到问题的同一解. 试验的一些结果见表 7.1.

当 $u|_{\Gamma}=-2, -3, 20, 50$ 时, P-S-COR 算法不收敛, 根据文献[58], $\mu|_{\Gamma}=-2, -3$ 时问题的解可能不存在. 而当 $\mu|_{\Gamma}=20, 50$ 时, 根据文献[57], 问题理应有唯一解, 此时出现不收敛现象估计是算法失效所致. 当 $u|_{\Gamma}=12$ 时, 算法收敛很慢.

II. 采用 N-S-COR 算法, 我们计算了 43 例. 解子问题用逐线松弛法或交替方向法. 结果表明当 $\mu|_{\Gamma}\geqslant-1$ 时问题的解存在, 而且算法是大范围收敛的(见表 7.2). 当 $u|_{\Gamma}\leqslant-1.2$ 时算法误差波动, 不收敛到任何解.

当用 N_{μ}-S-COR 算法时, 结果表明, 在固定拟边界松弛因子 $\omega=1.4$ 的条件下, 以取 $\mu=1.4$ 为好. 当 $\mu=2.1$ 时算法收敛很慢, 而当 $\mu=3.1$ 时则不收敛.

III. 从 P-S-COR 算法与 N_{μ}-S-COR 算法的收敛速度来比较, N-S-COR 算法的收敛速度比 P-S-COR 算法的收敛速度要快, 以两者的收敛范围来看, N_{μ}-S-COR 算法具有更大范围的收敛性. 就这个例子而论, N-S-COR 算法比 P-S-COR 算法优越(见表 7.3).

P-S-COR 算法与 N_{μ}-S-COR 算法还可用于解非线性偏微分方程组和分歧问题. 文献[68]给出了用上述算法解定常与非定常的二维 Navier-Stokes 方程和分歧问题的数值试验

结果.

表 7.1

$\mu\|_\Gamma$	1	-1	0	8	$1/(x+y+1)$	$\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3,\Gamma_4$ 1, 1, -1, -1
收敛范围	$-6\leqslant\mu^\circ\leqslant7$	$-3\leqslant\mu^\circ\leqslant3$	$-5\leqslant\mu^\circ\leqslant6$	$-8\leqslant\mu^\circ\leqslant10$	$-5\leqslant\mu^\circ\leqslant6$	$-5\leqslant\mu^\circ\leqslant6$

表 7.2

$\mu\|_\Gamma$	-1	20	100
收敛范围	$-100\leqslant\mu^\circ\leqslant200$	$-100\leqslant\mu^\circ\leqslant100$	$0\leqslant\mu^\circ\leqslant110$

表 7.3

$\mu\|_\Gamma$	-1	0	12	100
μ°	0	6	10	110
N-S-COR 迭代次数	34	34	26	44
P-S-COR 迭代次数	70	34	670	不收敛

第 8 章

Schwarz 型多层网格法

近年来发展起来的多层网格法(Multigrid Method)引起了人们极大的关注. 大量的数值实验证明，多层网格法对于广泛的科学计算问题是非常有效的，而且其计算工作量与未知量的个数成正比，这是现有计算工作量最少的算法(最优算法)之一.

多层网格法的出现可追朔到1962年，当时苏联学者 Федоренко 提出了多层网格的基本思想并讨论了规则区域上解 Poisson 方程的多层网格法的收敛性[29]、[30]. 1966年 Бахвалов 提出了多层网格法与套迭代法相结合的思想，并将收敛性证明推广到规则区域上的一般变系数二阶椭圆型方程[31]. 尽管 Федоренко 和 Бахвалов 在原则上已证明了多层网格算法的渐近最优性质，但当时并没有引起人们足够的重视. 直到1970年，才被 Brandt 认识到多层网格法的真正价值. 他对此方法作了系统研究，提出了非线性多层网格法(FAS 格式)、自适应技巧(MLAT)、局部网格稀疏化、套迭代思想的系统应用(FMG)以及局部 Fonrier 分析工具在方法优化上的应用等[32]; Nicolaides 系统地讨论了有限元离散的多层网格思想[33]; Hackbusch 建立了一般收敛性理论[34]. 1977年以后，多层网格方法得到了突飞猛进的发展，到目前已发展到了有限元、非线性边值问题、特征值问题、分歧问题、抛物型问题及其他非椭圆性问题、发展方程和积分方程等众多领域.

近年来，人们在探讨如何将多层网格法与其他数值和数学基本原理相结合，以拓广多层网格法的应用范围．同时，为了能在并行计算机上有效地使用多层网格法，也开始探讨如何将多层网格法并行化[35]、[59]、[61]．在本章，我们将S-算法与多层网格法结合起来，构造了一类 Schwarz 型的多层网格法。

为了构造 Schwarz 型的多层网格法，我们用了较大篇幅来介绍多层网格法的基本思想和基本算法，但仅限于这样一类问题：基于差分法离散方式，具有 Dirichlet 边界条件的二阶椭圆型微分方程．有兴趣钻研的读者可参考后面所列的有关参考文献．

§1 两层网格法

考虑 Dirichlet 问题：

$$\begin{cases} Au=f(x)\text{于 }\Omega\text{ 内}, & (1)\\ u|_{\Gamma}=\varphi(x), & (2)\end{cases}$$

其中 Ω 为一矩形区域，它以 Γ 为边界，A 是 Ω 上的二阶线性椭圆微分算子．

采用差分格式将它离散，记其离散形式为

$$\begin{cases} A_h u_h=f_h\text{ 于 }\Omega_h\text{ 内}, & (3)\\ u_h|_{\Gamma_h}=\varphi_h. & (4)\end{cases}$$

我们称离散解 u_h 是定义在 $\Omega_h\cap\Gamma_h$ 上的网格函数，称 A_h 是网格算子，即网格函数空间之间的映射

$$A_h:\ G(\Omega_h)\to G(\Omega_h),$$

其中 $G(\Omega_h)$ 为 Ω_h 上网格函数的线性空间．若设 Ω_h 由相应 u_h 的未知网格值的 N 个网格点组成，则 $G(\Omega_h)$ 是 N 维的，

h 表示离散参数, 我们把边界条件(4)合并到方程(3)中去, 这样(3)～(4)可合记为

$$A_h u_h = f_h. \tag{5}$$

显然, A_h: $G(\Omega_h) \to G(\Omega_h)$ 仍是一个线性网格算子, (5)表示一个线代数方程组, 且 A_h^{-1} 存在. 需要指出的是, 这种合并的处理方式除了对我们所讨论的这一特殊问题合理外, 主要是为了叙述的简便, 一般地, 在多层网格法中对微分方程和边界条件应作分别处理.

多层网格法的思想和算法包括两个主要的过程: 密网松弛(或者称为光滑)和粗网校正. 而粗网校正过程的基本思想和算法起源于我们下面所要叙述的所谓亏损方程(defective equation)及其逼近.

令 u_h^j 是(5)的解 u_h 的一个初始近似, 那么

$$V_h^j = u_h - u_h^j, \tag{6}$$

则表示 u_h^j 的误差(或者说是 u_h^j 的校正). 用

$$d_h^j = f_h - A_h u_h^j \tag{7}$$

表示 u_h^j 的剩余(或者说是 u_h^j 的残量).

剩余方程

$$A_h V_h^j = d_h^j \tag{8}$$

与原方程(5)等价, 而且我们有

$$u_h = u_h^j + V_h^j. \tag{9}$$

如果对(8)作一个合理的逼近, 求出它的一个近似解 $\hat{V}_h^j$, 则可给出(5)的一个新的近似解

$$u_h^{j+1} = u_h^j + \hat{V}_h^j. \tag{10}$$

不难看出, (6)～(10)的反复应用描述了一个迭代过程, 它刻划出了某些经典迭代方法(例如 Jacobi 和 Gauss-Seidel 方法)的基本框架. 众所周知, Jacobi 方法是以 A_h 的对角矩

阵替换 A_h 来逼近(8); Gauss-Seidel 方法则是以 A_h 的下三角矩阵替换 A_h 来逼近(8)。 作为一种迭代方法，多层网格法的粗网校正过程除了遵循上述基本框架外，在逼近(8)的方式上作了一个完全不同的选择：用一个比 Ω_h 较粗的网格 Ω_H 上的相应网格算子 A_H 来逼近 A_h，这就意味着剩余方程(8)由方程

$$A_H\hat{V}_H^l = d_H^l \tag{11}$$

所替换，其中 $H>h$.

$$A_H:\ G(\Omega_H)\to G(\Omega_H),\ \dim G(\Omega_H)\ll\dim G(\Omega_h),$$

且 A_H^{-1} 存在，A_H 按照 A_h 在 Ω_h 上的构造方式在 Ω_H 上构造. 原则上，A_H 可以是在某种意义下任何合理地逼近 A_h 的差分算子. 其中常用的一种逼近方式是 Galerkin 逼近：

$$A_H = I_h^H A_h I_H^h. \tag{12}$$

其中 I_h^H 定义为 $G(\Omega_h)\to G(\Omega_H)$ 的变换算子，即 I_h^H 将 d_h^l 从 Ω_h 上限制(restrict)到 Ω_H 上：$d_H^l = I_h^H d_h^l$；I_H^h 定义为 $G(\Omega_H)\to G(\Omega_h)$ 的变换算子，即 I_H^h 将 $\hat{V}_H^l$ 从 Ω_H 上插值(或延拓)(intepolate or prolongate)到 Ω_h 上：$\hat{V}_h^l = I_H^h\hat{V}_H^l$.

当 $H=2h$ 时，最常用的限制算子是完全加权算子，最常用的插值算子是双线性插值算子. 我们给出它们的具体形式如下：

$$I_h^H = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}_h^H \quad (\text{表示 9 点加权平均})$$

$$I_H^h = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}_H^h \quad (\text{表示双线性插值})$$

算子 I_h^H 与 I_H^h 有时是 h 和 x 的函数，但在本节中我们都

假定它们与 h 和 x 无关，并且满足

$$I_h^H = C(I_H^h)^T, \ C>0. \tag{13}$$

综上所述，粗网校正的一次迭代步(从 u_h^j 计算出 u_h^{j+1})的过程可归纳如下：

计算剩余：	$d_h^j = f_h - A_h u_h^j$;	
限制剩余(密网到粗网的变换)：	$d_H^j = I_h^H d_h^j$;	
在 Ω_H 上精确求解：	$A_H \hat{V}_H^j = d_H^j$;	(14)
插值校正(粗网到密网的变换)：	$\hat{V}_h^j = I_H^h \hat{V}_H^j$;	
计算新的近似：	$u_h^{j+1} = u_h^j + \hat{V}_h^j$.	

下图表示了这个过程的结构：

$$\begin{array}{ccc} u_h^j \to d_h^j = f_h - A_h u_h^j & & \hat{V}_h^j \to u_h^{j+1} = u_h^j + \hat{V}_h^j \\ \downarrow I_h^H & & \uparrow I_H^h \\ d_H^j & \longrightarrow & A_H \hat{V}_H^j = d_H^j \end{array}$$

图 8.1

上述过程就称为多层网格法的粗网校正过程(Coarse-grid correction)．不难看出，这一过程的迭代算子是 $I_h - I_H^h A_H^{-1} I_h^H A_h$，式中 I_h 是相应的单位矩阵．

很显然，用粗网校正过程从 u_h^j 计算出 u_h^{j+1} 比对方程(8)用迭代方法从 u_h^j 计算出 u_h 的一个好的近似的计算量要少得多．遗憾的是，粗网校正过程的收敛性质很不理想．一般来说，迭代算子的谱半径 $\rho(I_h - I_H^h A_H^{-1} I_h^H A_h) \geqslant 1$[36]．

这一事实说明方程(11)对方程(8)不是一个合理的逼近．特别地，通过 Fourier 分析，可以知道，粗网校正过程不能压缩那些在粗网上表示不出来的误差的高频分量(但是可以迅速地压缩它的低频分量)．

另一方面，合适的松弛方法(比如带松弛因子的迭代方

法)，其光滑因子一般都很小，只须作 1～2 次松弛就可有效地"磨光"误差的高频分量．但众所周知，一般松弛法的收敛因子随 $h\to 0$ 而趋于 1，它对压缩误差的低频分量收效甚微．

这就使人们自然地想到把密网松弛过程与粗网校正过程结合起来，即在密网上松弛，"磨光"高频分量，在粗网上校正，压缩低频分量．这种结合就构成了多层网格法．也正是这种结合，导致了多层网格法的 h-无关收敛性，从而使多层网格法成为一个渐近最优算法[36]．

这种结合的一个最简单情形，就是两层网格 (h, H) 方法，即只用到一层粗网格 (Ω_H) 的粗网校正过程与密网 (Ω_h) 松弛结合起来的情形．下面列出两层网格法的一步迭代过程 $(u_h^j\to u_h^{j+1})$：

(1) 光滑部分 I：

对 u_h^j 作 $\nu_1(\geqslant 0)$ 次光滑得

$\bar{u}_h^j=\mathrm{RELAX}^{\nu_1}(u_h^j,\ A_h,\ f_h)$．

(2) 粗网校正部分： (15)

计算剩余量 $\bar{d}_h^j=f_h-A_h\bar{u}_h^j$；

限制剩余量(密网到粗网的变换) $\bar{d}_H^j=I_h^H d_H^j$；

在 Ω_H 上精确求解 $A_H\hat{v}_H^j=\bar{d}_H^j$；

插值校正量(粗网到密网的变换) $\hat{v}_h^j=I_H^h\hat{v}_H^j$；

计算 Ω_h 上的校正近似 $\bar{u}_h^{j+1}=\bar{u}_h^j+\hat{v}_h^j$．

(3) 光滑部分 II：

对 $\bar{u}_h^{j+1}$ 作 $\nu_2(\geqslant 0)$ 次光滑得

$u_h^{j+1}=\mathrm{RELAX}^{\nu_1}(\bar{u}_h^{j+1},\ A_h,\ f_h)$．

其中 $\nu_1+\nu_2=\nu>0$，$\bar{u}_h^j=\mathrm{RELAX}^{\nu_1}(u_h^j,\ A_h,\ f_h)$ 表示以 u_h^j 为初值，对方程 $A_hu_h=f_h$ 作 ν_1 次光滑(松弛)得到 $\bar{u}_h^j$，

$u_h^{i+1} = \mathrm{RELAX}^{\nu_2}(\bar{u}_h^{i+1},\ A_h,\ f_h)$亦有类似的意义.

上述过程(15)还可用一个简单的图形表示出来:

$$\begin{array}{ccc} u_h^i \to \bar{u}^i \xrightarrow[\nu_1\text{次松弛}]{\qquad} \bar{d}_h^i = f_h - A_h\bar{u}_h^i & & V_h^i \to \bar{u}_h^i + \hat{V}_h^i \xrightarrow[\nu_2\text{次松弛}]{\qquad} u_h^{i+1} \\ \downarrow I_h^H & & \uparrow I_H^h \\ \bar{d}_H^i & \longrightarrow & A_H \hat{V}_H^i = d_H^i \end{array}$$

图 8.2

从上面的描述,立刻可得(h, H)两层网格法的迭代矩阵:

$$M_h^H = S_h^{\gamma_2}(I_h - I_H^h A_H^{-1} I_h^H A_h) S_h^{\gamma_1}, \tag{16}$$

其中$S_h^{\gamma_i}$表示所用松弛方法的迭代矩阵, I_h表示相应的单位矩阵.

注 关于光滑化方法的选择,目前已积累了很多经验,除了通常的 Jacobi、GS、SOR 迭代等方法经常被选择作为光滑化方法外,原则上,任何具有较好的光滑性和较少工作量的迭代方法皆可充任,比如 RB(红-黑)松弛方法、ZEBRA 松弛方法、交替 ZEBRA 松弛方法, 以及各种形式的不完全 LU-分解方法等等[36].

当然,在同一两层网格迭代的进程中,对于不同的光滑步还可选用不同的光滑化方法.

§2 多层网格法 MG (Multigrid)

为了引进多层网格法的基本思想, 在上节我们先介绍了两层网格法. 然而通常在实际中并不用它, 它的全部意义是作为多层网格法的理论基础和基本原型. 在本节, 我们就以它为基础来介绍多层网格法.

我们已经看到, 在$(h,\ H)$两层网格法中, 仅仅是在原网格(密网格)Ω_h上作了一次稀疏化而得下一层较粗网格Ω_H,然

后在 Ω_H 上精确求解方程(11)

$$A_H\hat{V}_H^l=\bar{d}_H^l.$$

多层网格法正是在这点上拓广了两层网格法，即不精确求解(11)，而是对 Ω_H 再进行稀疏化，比如对 Ω_H 进行标准稀疏化而得到更粗网格 $\Omega_k(K=2H)$，以一个类似于(h, H)两层网格法的方式，对(11)实行(H, K)两层网格迭代，不过，对(11)的迭代求解必须以 0 为新始值. 这样就构成了一个(h, H, K)三层网格法. 若(H, K)两层网格法有较好的收敛性，则只需很少的迭代步，比如说 r 次，便可得到(11)一个足够好的逼近. 反复地运用这种思想，就可构成四层、五层、……$l+1$ 层网格法.

通过下面的一些简单图形，我们可以更清楚多层网格法的结构. 为此，先引进四个记号和一个参数：

○——表示光滑步；

□——表示精确求解；

＼——表示密网到粗网的变换；

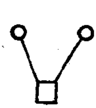
／——表示粗网到密网的变换；

r——表示循环类型的参数(正整数)，

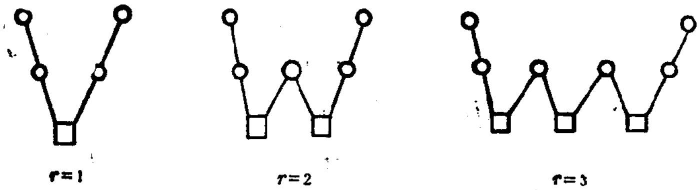
当 $r=1$ 时，称为 V—循环；

当 $r=2$ 时，称为 W—循环.

两层网格法：

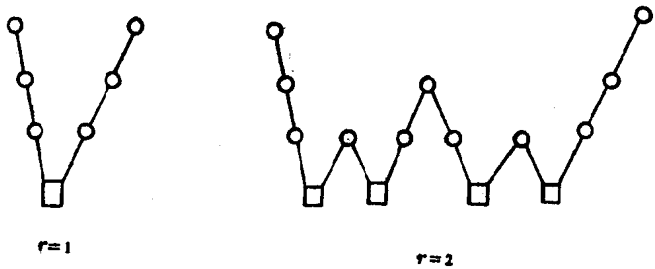


三层网格法：



上图分别表示在第二层作 $r=1, 2, 3$ 次两层网格迭代.

四层网格法:



上图分别表示在第三层作 $r=1, 2$ 次三层网格迭代.

多层网格法的网格步长可用一步长序列来表示:

$$\{h_k\} \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ l-1,\ l.$$

其中 k 表示各个层次, l 表示最密的层次, 也即网格的总层数. 相应的 h_l 表示最密层的网格步长, 且一般地有

$$h_l<h_{l-1}<\cdots<h_1<h_0.$$

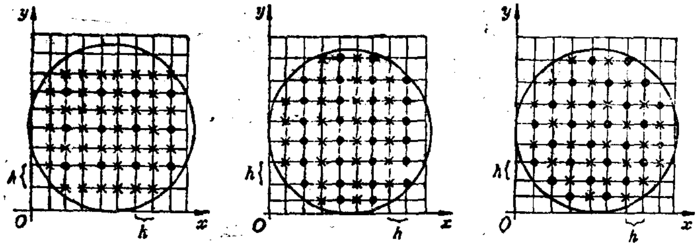
如果总成立

$$h_k=2h_{k+1},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ l-1, \tag{17}$$

则称这种稀疏方式为标准稀疏化(见图 8.3).

注　关于稀疏方式还有如下的类型:

若网格尺寸 h 在一个方向上放大两倍, 即 $H=(2h_x,\ h_y)$



标准稀疏化　　　　半稀疏化　　　　红-黑稀疏化

用●标记 Ω_H 上的网格点，●和×所标记的所有网格点都是 Ω_h 上的网格点.

图 8.3

或 $H=(h_x, 2h_y)$，我们称这种稀疏方式为半稀疏化(见图 8.3).

若较粗网格点以跳棋棋盘的方式分布在密网格上，我们称这种稀疏方式为红-黑稀疏化(见图 8.3).

相应的网格、网格函数、网格函数空间、网格算子及两个变换算子都可分别用序列来表示:

$$\{\Omega_k\}、\{u_k\}、\{G(\Omega_k)\}、\{A_k\}、\{I_{k+1}^k\}、\{I_k^{k+1}\},$$

现在我们可以来描述多层网格法的算法了.

对于一个固定的 $l\geqslant 1$，我们描述求解(1)～(2)的离散方程

$$A_l u_l=f_l, \text{于 } \Omega_l \text{ 上} \tag{18}$$

的多层网格法. $\nu_1+\nu_2=\nu(>0)$ 及参数 r 假设固定.

给定 u_l 一个初始近似 u_l^i，计算新的近似 u_l^{i+1} 的一步多层网格($(l+1)$——层网格)循环如下:

若 $l=1$，就是本章§1节所述两层网格法情形. 此时 $\Omega_h=\Omega_1$，$\Omega_H=\Omega_0$.

若 $l>1$

(1) 光滑部分 I：

对 u_l^j 作 $\nu_1(\geqslant 0)$ 次光滑得

$$\bar{u}_l^j = \text{RELAX}^{\nu_1}(u_l^j,\ A_l,\ f_l).$$

(2) 粗网校正部分：

计算剩余量 $\bar{d}_l^j = f_l - A_l\bar{u}_l^j$；

限制剩余量（密网到下一层较粗网的变换）

$$\bar{d}_{l-1}^j = I_l^{l-1}\bar{d}_l^j;$$

以 0 为初始值，实行 $r(\geqslant 1)$ 次 l-层网格迭代（使用 Ω_{l-1}, Ω_{l-2}, …, Ω_0 及相应的网格算子），在 Ω_{l-1} 上求剩余方程 $A_{l-1}\hat{V}_{l-1}^j = \bar{d}_{l-1}^j$ 的近似解 $\hat{V}_{l-1}^j$； (19)

插值校正量（较粗网到密网的变换）

$$\hat{V}_l^j = I_{l-1}^l \hat{V}_{l-1}^j;\ \bar{u}_l^{j+1} = \bar{u}_l^j + \hat{V}_l^j.$$

计算 Ω_l 上的校正近似

(3) 光滑部分 II：

对 $\bar{u}_l^{j+1}$ 作 $\nu_2(\geqslant 0)$ 次光滑得

$$u_l^{j+1} = \text{RELAX}^{\nu_2}(\bar{u}_l^{j+1},\ A_l,\ f_l).$$

若记 $(l+1)$—层网格法的迭代矩阵为 M_l^{MG}，记 $(k+1,\ k)$ 两层网格迭代矩阵为 M_{k+1}^{TG}，则 M_l^{MG} 由下式递归定义：

$$M_1^{\text{TG}} = S_1^{\nu_2}(I_1 - I_0^1 A_0^{-1} I_1^0 A_1) S_1^{\nu_1},$$

$$\begin{aligned} M_{k+1}^{\text{MG}} &= S_{k+1}^{\nu_2}(I_{k+1} - I_k^{k+1}(I_k - (M_k^{\text{MG}})^r) A_k^{-1} I_{k+1}^k A_{k+1}) S_{k+1}^{\nu_1} \\ &= M_{k+1}^{\text{TG}} + S_{k+1}^{\nu_2} I_k^{k+1} (M_k^{\text{MG}})^r A_k^{-1} I_{k+1}^k A_{k+1} S_{k+1}^{\nu_1}, \end{aligned} \tag{20}$$

$$k = 1,\ 2,\ \cdots,\ l-1.$$

注 由(19)的进程可以看出，$(l+1)$-层网格法是在完成了光滑步 I 和把 Ω_l 上的剩余量 $\bar{d}_l^j$ 限制到 Ω_{l-1} 上去以后，以 0 为初始值，在 Ω_{l-1} 上用 r 步 l-层网格法迭代求解的，

也就是对剩余方程 $A_{l-1}\tilde{V}_{l-1}^{l}=\tilde{d}_{l-1}^{l}$，以 $\tilde{V}_{l-1}^{l(0)}=0$ 为初始值，用迭代公式 $\tilde{V}_{l-1}^{l(i+1)}=M_{l-1}^{MG}\tilde{V}_{l-1}^{l(i)}+g$ 近似求解的. 不难推出，此迭代公式的第 γ 步近似解 $\tilde{V}_{l-1}^{l(\gamma)}$ 可表示为

$$\tilde{V}_{l-1}^{l(\gamma)}=(I_{l-1}-(M_{l-1}^{MG})^{\gamma})A_{l-1}^{-1}\tilde{d}_{l-1}^{l}.$$

这就意味着，在 $(l,\ l-1)$ 两层网格法的迭代算子 $M_l^{TG}=S_l^{\nu_1}(I_l-I_{l-1}^{l}A_{l-1}^{-1}I_l^{l-1}A_l)S_l^{\nu_1}$ 中，若将在 Ω_{l-1} 上精确求解 $\tilde{V}_{l-1}^{l}$ 的算子 A_{l-1}^{-1} 换成迭代求解 $\tilde{V}_{l-1}^{l(\gamma)}$ 的算子 $(I_{l-1}-(M_{l-1}^{MG})^{\gamma})A_{l-1}^{-1}$，则所得结果

$$\begin{aligned}&S_l^{\nu_2}(I_l-I_{l-1}^{l}(I_{l-1}-(M_{l-1}^{MG})^{\gamma})A_{l-1}^{-1}I_l^{l-1}A_l)S_l^{\nu_1}\\&=M_l^{TG}+S_l^{\nu_2}I_{l-1}^{l}(M_{l-1}^{MG})^{\gamma}A_{l-1}^{-1}I_l^{l-1}A_lS_l^{\nu_1},\end{aligned}$$

即为 $(l+1)$-层网格法的迭代算子. 若将 l 换成 $k+1$ 则得公式(20).

(19)所叙述的计算过程可用下面的程序框图来描述.

如果将多层网格法与套迭代(nested iteration)技巧结合起来，就构成所谓 FMG(full multigrid)方法. FMG 方法不但可以提高多层网格法的效率，仍然保持渐近最优的性质，而且还具备自适应的性能.

套迭代技巧是一个人们熟知的数值方法，它早就成功地被用于许多迭代方法(如 SOR 方法等)之中. 它的基本思想是：在最粗网格 Ω_0 上精确求解方程

$$A_0u_0=f_0 \text{ 于 } \Omega_0 \text{ 上},$$

以便为 Ω_1 上提供一个较好的初值 u_1^0，并且通过对误差 $\|\tilde{u}_k-u_k^0\|$ 的层层网格检验以控制网格加密到适当的层，从而避免事先确定密网格层可能造成的计算量的浪费. 因此 FMG 方法与 MG 方法一个重要的区别是：MG 方法是先确定密网格层然后逐层稀疏，而 FMG 方法则先确定最粗网格层然后逐层加密.

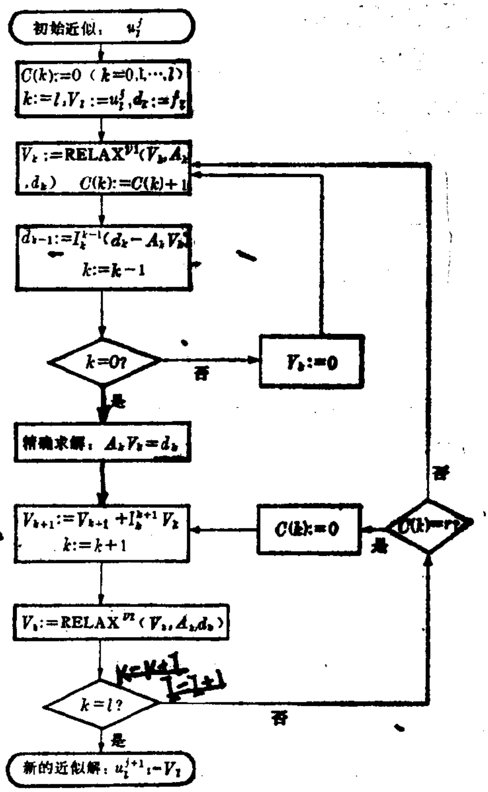


图 8.4

设

$$A_lu_l=f_l \text{ 于 } \Omega_l \text{ 上} \quad (l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \tag{21}$$

是微分方程(1)～(2)的一个离散方程序列．对任意 $l\geqslant 1$，记号

$$\text{MGI}^r(\cdot,\ l,\ A_l,\ f_l): G(\Omega_l)\to G(\Omega_l)$$

表示一个由求解(21)的 r 个适当的多层网格迭代步组成的程序(于网格 Ω_0, Ω_1, $\cdots$, Ω_l 上，参看图 8.4)．

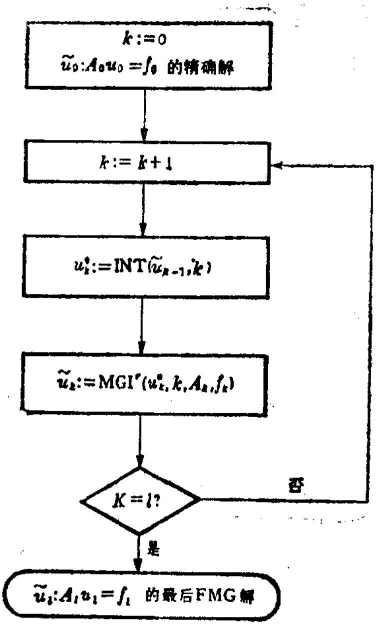


图 8.5

对于一个任意固定的 l, $h=h_l$, 最后的 FMG 近似解记为 $\tilde{u}_l$, 参数 r 固定为 1 或者 2.

FMG 方法可以由一个程序框图表示(图 8.5).

注 控制部分$\langle k=l?\rangle$可以用$\langle\|\tilde{u}_k-u_k^0\|\leqslant\varepsilon?\rangle$来代替. 其中 ε 为求解的允许误差.

其中 $\quad \mathrm{INT}(\cdot, k): G(\Omega_{k-1})\to G(\Omega_k)$

表示某个适当的插值过程, 一般地都假设 INT 为形如

$$\mathrm{INT}(u_{k-1}, k)=\prod_{k-1}^{k}u_{k-1}+W_k \tag{22}$$

的仿射算子, 其中

$$\prod_{k-1}^{k}: G(\Omega_{k-1})\to G(\Omega_k)$$

为一线性算子, $W_k\in G(\Omega_k)$ 为某个固定的网格函数.

INT 的这种表达形式可以使我们在插值过程中将给定的边界条件考虑进去. 为了区别插值(22)与多层网格法中的插值 I_H^h,特别地称插值(22)为 FMG 插值.

§3 多层网格法的收敛性

关于多层网格法的收敛性, 已有不少多层网格法专家, 如 A. Brandt[32]、K. Stüben 与 U. Trottenberg[36]、W. Hackbusch[34] 各自在他们的论文中作了阐述, 而且通过使用 Fourier 分析的工具,对模型问题论证了它的 h—无关收敛性以及它的计算工作量是与离散未知量(最密网格网点个数)成正比的,从而确认了多层网格法是一个渐近最优算法.

在这一节,我们打算以本书系统的论证方式,证明多层网格法的收敛性.

为清楚起见,下面分三个步骤叙述这一证明过程(参看文献[59]).

一、建立引理 8.1.

考虑系数矩阵 A 对称正定的线代数方程组

$$Au=f, \tag{23}$$

其一般形式的迭代为

$$u^{i+1}=u^i+M^{-1}(f-Au^i) \quad i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{24}$$

随着 M 取不同形式, (24)便给出不同形式的迭代方法. 例如:

当 $M=D$ 则是 Jacobi 迭代;

当 $M=D-L$ 则是 GS 迭代;

当 $M=\frac{1}{\omega}(D-\omega L)$ 则是 SOR 迭代.

其中 D、$-L$ 分别为 A 的对角矩阵和严格下三角矩阵.

为了下面证明的需要，我们引进文献[38]中的一个定义.

定义 非对称矩阵 B 称为正定，当且仅当对称矩阵 $B+B^T$ 是正定的.

现在，我们给出引理：

引理 8.1 若(23)的系数矩阵 A 对称正定，$B=2M-A$ 正定. 定义泛函

$$J(u)=\frac{1}{2}(Au,\ u)-(f,\ u).$$

则由迭代方法(24)得到的近似解序列 $\{u^i\}_0^\infty$ 使得序列 $\{J(u^i)\}_0^\infty$ 严格单调下降.

证明 经简单运算可知

$$\begin{aligned}J(u^{i+1})&=\frac{1}{2}(Au^{i+1},\ u^{i+1})-(f,\ u^{i+1})\\&=J(u^i)-\frac{1}{2}(B(u^{i+1}-u^i),\ u^{i+1}-u^i).\end{aligned}$$

若 $u^{i+1}=u^i$，则迭代停止，此时有 $u^i=u^*$，故可设 $u^{i+1}\neq u^i$，因 B 正定，则有

$$\frac{1}{2}(B(u^{i+1}-u^i),\ u^{i+1}-u^i)>0.$$

因此必有 $\qquad J(u^{i+1})<J(u^i)\quad i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$

即序列 $\{J(u^i)\}_0^\infty$ 严格单调下降.

引理证毕.

矩阵 B 正定的要求是容易满足的，它在很大程度上取决于迭代方法的选取，即 M 形式的选取. 而 MG 方法的光滑步中最常用的迭代方法大都能满足这一要求. 下面我们以三个最常用的迭代方法来说明(在矩阵 A 对称正定的条件下).

例 1 对于 Jacobi 迭代，若其收敛，则 $B=2D-A$ 正

定[39].

例 2 对于 GS 迭代，此时 $B=D-L+L^T$，$B+B^T=2D$，根据定义，B 正定.

例 3 对 SOR 迭代，此时 $B=\left(\frac{2}{\omega}-1\right)D-L+L^T$，$B+B^T=2\cdot\frac{2-\omega}{\omega}D$，根据定义，当 $0<\omega<2$ 时 B 正定.

对于更一般的迭代，B 通常为 A 的（块）对角部分，故 $B+B^T$ 的正定性也容易证明.

二、建立引理 8.2.

考虑方程(18)：

$$A_l u_l=f_l \text{ 于 } \Omega_l \text{ 上}, l\geqslant 1.$$

定义泛函 $$J_l(u_l)=\frac{1}{2}(A_l u_l,\ u_l)-(f_l,\ u_l).$$

并设 A_l 对称正定，方程的精确解为 u_l^*.

在 Ω_l 和 Ω_{l-1} 上定义离散 L_2 内积（以二维情形为例）：

$$(u_l,\ V_l)_l=h_l^2\sum_{x\in\Omega_l}u_l(x)\bar{v}_l(x),$$

$$(u_{l-1},\ V_{l-1})_{l-1}=h_{l-1}^2\sum_{x\in\Omega_{l-1}}u_{l-1}(x)\bar{v}_{l-1}(x).$$

在线性空间 $G(\Omega_l)$ 上定义范数：

$$\|u_l\|_l=\sqrt{(u_l,\ u_l)_l}.$$

在线性空间 $G(\Omega_{l-1})$ 上定义范数：

$$\|u_{l-1}\|_{l-1}=\sqrt{(u_{l-1},\ u_{l-1})_{l-1}}.$$

内积意义下 I_{l-1}^l 与 I_l^{l-1} 的对偶性表现为：

$$(I_l^{l-1}u_l,\ v_{l-1})_{l-1}=C_1(u_l,\ I_{l-1}^l v_{l-1})_l, \tag{25}$$

其中 $C_1>0$ 为与 l 无关的常数.

为保证多层网格法的收敛性，还需假设[36]、[34]：

$$I_l^{l-1}=C_2(I_{l-1}^l)^T;$$

$$A_{l-1}=I_l^{l-1}A_lI_{l-1}^l \quad (\text{Galerkin 逼近}); \tag{26}$$

$$\frac{1}{C_2}\|v_{l-1}\|_{l-1}\leqslant\|I_{l-1}^lv_{l-1}\|_l\leqslant C_2\|v_{l-1}\|_{l-1},\ v_{l-1}\in G(\Omega_{l-1}) \tag{27}$$

成立;其中 $C_2>0$ 为与 l 无关的常数.

根据(25)与(26)两式,则有

$$(A_{l-1}u_{l-1},\ u_{l-1})_{l-1}=C_1(A_lI_{l-1}^lu_{l-1},\ I_{l-1}^lu_{l-1})_l,$$
$$u_{l-1}\in G(\Omega_{l-1}). \tag{28}$$

根据(27)、(28)可知:当 A_l 对称正定时,A_{l-1} 也是对称正定的.

在上述条件下,我们给出如下引理:

引理 8.2 若矩阵 A_l 对称正定,$B_l=2M_l-A_l$ 正定,且假设条件(26)、(27)成立,则求解方程(18)的 $(l+1)$—层 MG 算法(19)得到的近似解序列 $\{u_l^i\}_0^\infty$ 使得序列 $\{J_l(u_l^i)\}_0^\infty$ 严格单调下降.

证明 我们采用归纳法证明.

若 $l=1$,则为两层网格法.此时,从(19)可知,由校正步中的近似解 $\bar{u}_l^{i+1}=\bar{u}_l^i+\hat{V}_l^i$ 所形成的泛函

$$\begin{aligned}J_l(\bar{u}_l^{i+1})&=J_l(\bar{u}_l^i+\hat{V}_l^i)\\&=J_l(\bar{u}_l^i)+(A_l\bar{u}_l^i-f_l,\ I_{l-1}^l\hat{V}_{l-1}^i)_l\\&\quad+\frac{1}{2}(A_lI_{l-1}^l\hat{V}_{l-1}^i,\ I_{l-1}^l\hat{V}_{l-1}^i)_l.\end{aligned} \tag{29}$$

另由(28)可知

$$\begin{aligned}&(A_l\bar{u}_l^i-f_l,\ I_{l-1}^l\hat{V}_{l-1}^i)_l\\&=\frac{1}{C_l}(I_l^{l-1}(A_l\bar{u}_l^i-f_l),\ \hat{V}_{l-1}^i)_{l-1}\\&=\frac{-1}{C_l}(A_{l-1}\hat{V}_{l-1}^i,\ \hat{V}_{l-1}^i)_{l-1}\end{aligned}$$

$$=-(A_l I_{l-1}^l \hat{V}_{l-1}^i,\ I_{l-1}^l \hat{V}_{l-1}^i)_l. \tag{30}$$

将(30)代入(29)就有

$$J_l(\bar{u}_l^{i+1})=J_l(\bar{u}_l^i)-\frac{1}{2}(A_l I_{l-1}^l \hat{V}_{l-1}^i,\ I_{l-1}^l \hat{V}_{l-1}^i)_l$$

$$\leqslant J_l(\bar{u}_l^i).$$

若 $\bar{u}_l^{i+1}=\bar{u}_l^i$，则迭代停止。所以可设 $\bar{u}_l^{i+1}\neq\bar{u}_l^i$，即 $I_{l-1}^l\hat{V}_l^i\neq 0$，故由 A_l 的正定性可知下式成立

$$J_l(\bar{u}_l^{i+1})<J_l(\bar{u}_l^i).$$

对 $\bar{u}_l^{i+1}$ 施行光滑部分 II 后的结果为 u_l^{i+1}，对 $\bar{u}_l^i$ 施行光滑部分 I 之前的近似解为 u_l^i(参看(19))，根据引理 8.1，那么 u_l^{i+1} 与 u_l^i 分别形成的 $J_l(u_l^{i+1})$ 与 $J_l(u_l^i)$ 必然满足：

$$J_l(u_l^{i+1})<J_l(\bar{u}_l^{i+1})<J_l(\bar{u}_l^i)<J_l(u_l^i),$$

于是便有
$$J_l(u_l^{i+1})<J_l(u_l^i).$$

即 $l=1$ 时命题成立；

假设 $l=k$ 时命题成立，那么对于方程 $A_k\hat{V}_k^i=d_k^i$，则因为初值为 0，故成立

$$J_k(\hat{V}_k^i)<J_k(0)=0. \tag{31}$$

当 $l=k+1$ 时，由(28)不难推出：

$$J_{k+1}(\bar{u}_{k+1}^i+\hat{V}_{k+1}^i)$$

$$=J_{k+1}(\bar{u}_{k+1}^i+I_k^{k+1}\hat{V}_k^i)$$

$$=J_{k+1}(\bar{u}_{k+1}^i)+\frac{1}{2}(A_{k+1}I_k^{k+1}\hat{V}_k^i,\ I_k^{k+1}\hat{V}_k^i)_{k+1}$$

$$+(A_{k+1}\bar{u}_{k+1}^i-f_{k+1},\ I_k^{k+1}\hat{V}_k^i)_{k+1}$$

$$=J_{k+1}(\bar{u}_{k+1}^i)+\frac{1}{C_l}\left[\frac{1}{2}(A_k\hat{V}_k^i,\ \hat{V}_k^i)_k-(\bar{d}_k^i,\ \hat{V}_k^i)_k\right]$$

$$=J_{k+1}(\bar{u}_{k+1}^i)+\frac{1}{C_l}J_k(\hat{V}_k^i).$$

于上面的结果中利用(31)，则有

$$J_{k+1}(\bar{u}_{k+1}^{i}+\widetilde{V}_{k+1}^{i})<J_{k+1}(u_{k+1}^{i}).$$

根据引理 8.1，最后便得

$$J_{k+1}(u_{k+1}^{i+1})<J_{k+1}(u_{k+1}^{i}),\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

引理证毕.

至此，我们便可证明收敛性定理了.

定理 8.1 在引理 8.2 的条件下，$(l+1)$—层 MG 算法(19)收敛，其近似解序列 $\{u^{i}\}_{0}^{\infty}$ 收敛到(18)的精确解 u_{l}^{*}.

证明 根据 A_{l} 的正定性：

$$(A_{l}u_{l},\ u_{l})\geqslant\gamma\|u_{l}\|_{1}^{2},\ \gamma>0.$$

由上式并利用引理 8.2 可推知

$$\begin{aligned}\|u_{l}^{i}-u_{l}^{*}\|_{1}^{2}&\leqslant\frac{1}{\gamma}(A_{l}(u_{l}^{i}-u_{l}^{*}),\ u_{l}^{i}-u_{l}^{*})\\&=\frac{1}{\gamma}[(A_{l}u_{l}^{i},\ u_{l}^{i})+(A_{l}u_{l}^{*},\ u_{l}^{*})]\\&\quad-\frac{1}{\gamma}[(A_{l}u_{l}^{*},\ u_{l}^{i})+(A_{l}u_{l}^{i},\ u_{l}^{*})]\\&=\frac{2}{\gamma}[J_{l}(u_{l}^{i})-J_{l}(u_{l}^{*})]\qquad\qquad(32)\\&\leqslant\frac{2}{\gamma}[J_{l}(u_{l}^{i-1})-J_{l}(u_{l}^{*})]\\&\quad\vdots\\&\leqslant\frac{2}{\gamma}[J_{l}(u_{l}^{0})-J_{l}(u_{l}^{*})]\\&\leqslant M.\end{aligned}$$

即序列 $\{u_{l}^{i}-u_{l}^{*}\}_{0}^{\infty}$ 是一有界序列，从而可挑选出一强收敛于 $\bar{u}_{l}$ 的子序列：

$$u_{l}^{i_{k}}-u_{l}^{*}\to\bar{u}_{l},\ i_{k}\to\infty.$$

即

$$u_{l}^{i_{k}}\to u_{l}^{*}+\bar{u}_{l}=u_{l},\ i_{k}\to\infty.\qquad(33)$$

用 MG 算法迭代求解方程(18)，实质上就是采用如下迭代形式

$$u_l^{i+1}=M_l^{MG}u_l^i+g_l, \tag{34}$$

$$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

其中
$$g_l=(I_l-M_l^{MG})A_l^{-1}f_l.$$

因$\{u_l^i\}$是由(34)产生的，故其极限u_l满足

$$u_l=M_l^{MG}u_l+g_l,$$

即u_l为方程
$$A_lu_l=f_l$$

的解．故$u_l=u_l^*$.

由$\{J(u_l^i)\}$的单调性，得

$$\lim_{i\to\infty}J(u_l^i)=J(u_l^*).$$

由(32)即得

$$\|u_l^i-u_l^*\|_1\to 0.$$

定理得证．

值得指出的是：我们只在A_l为对称正定条件下证明 MG 算法的收敛性，并未证明收敛的h-无关性．

§4 非线性多层网格法

迄今为止，我们只讨论了求解线性问题的多层网格法．如果把多层网格法与某些处理非线性问题的方法，例如线性化方法或非线性迭代法，结合起来，则可构造求解非线性问题的多层网格法．

把多层网格法用于求解非线性问题时，就其处理问题的技巧可以把算法分成两类：一类是间接算法，即按照通常处理非线性问题的方式，先将问题线性化，然后对已线性化的问题

应用多层网格法；一类是直接算法，Brandt 称之为 FAS 格式 (full approximation scheme)，即按如下程序计算：密网非线性松弛——粗网完全校正——密网非线性松弛.

考虑非线性椭圆型边值问题

$$\begin{cases} Au=f(x,\ u) \text{ 于 } \Omega \text{ 内}, \\ u|_{\Gamma}=\varphi(x). \end{cases} \tag{35}$$

为简单起见，我们仍设 Ω 为一矩形区域，以 Γ 为其边界，A 为非线性微分算子，f 为已知函数.

设问题(35)的一种离散形式(采用差分方法)为

$$A_l u_l=f_l \text{ 于 } \Omega_l \text{ 上}, \tag{35'}$$

其中
$$A_l: G(\Omega_l)\to G(\Omega_l)$$
为非线性算子，f_l 为 Ω_l 上的已知网格函数.

设(35′)存在一个孤立解 u_l^*. 为使叙述简洁，我们不罗列解问题(35′)的各种非线性迭代法的收敛条件(可参看文献[38]与[26])，而只简单地假设那些条件在此成立.

下面我们叙述求解问题(35)(或(35′))的两类多层网格法.

(一)间接算法

在第 7 章，我们已经介绍了问题(35)的两种线性化方法：Newton 法和 Picard 法. 如果对问题(35)应用 Newton 法(或 Picard 法)线性化后再应用 MG 算法，则构成了以 Newton 法(或 Picard 法)为外迭代过程以 MG 迭代为内迭代过程的 N-MG(或 P-MG)算法. 但是这里我们着重讨论这种思想直接应用于(35′)的情形(记其为 NMG). 至于其他类型线性化方法与多层网格法结合的情形，与此并无原则上的差别.

设对(35′)先进行 Newton 线性化：

在 u_l^* 附近给一初始猜测 u_l^0，从而可设 u_l^i 为已知，求 u_l^{i+1}

的线性化迭代公式为

$$A_l u_l^i + DA_l(u_l^i)(u_l^{i+1} - u_l^i) = f_l, \tag{36}$$

$$i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

其中 $DA_l(u_l^i)$ 为 A_l 在 u_l^i 处的 Jacobi 矩阵.

将(36)记为

$$\begin{cases} DA_l(u_l^i)V_l^i = f_l - A_l u_l^i = g_l^i, \\ V_l^i = u_l^{i+1} - u_l^i. \end{cases} \tag{36'}$$

$$i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

对以 v_l^i 为未知量的线代数方程组(36′)实行多层网格法，就构成了以 Newton 法为外迭代，以多层网格法为内迭代的嵌套迭代算法.

一个很自然的问题是，Newton 法迭代的次数与 MG 算法迭代的次数怎样搭配，才能尽可能地提高 Newton 法的收敛速度和减少计算量？一般可以采取两种方案：

一种是由一个 Newton 步到下一个 Newton 步，MG 迭代次数大略增加一倍，即 MG 迭代次数在迭代中不断地成倍调整. 此时 Newton 法具有二阶敛速. 这一方案的主要问题是必须应用一个适当的控制技巧，以便得到 Newton 法收敛所必需的有关信息. 称此为方案 I.

另一种是固定每个 Newton 步中 MG 迭代的次数. 例如每个 Newton 步中只作一次 MG 迭代. 由此产生的缺点是线性化工作量增大，而且 Newton 法此时只有线性敛速. 但由于固定了 MG 迭代次数，则无需控制技巧. 称此为方案 II.

(二)直接算法 FAS

类似于线性多层网格法的情形，FAS 多层网格法亦可从 FAS 两层网格法出发递归定义. 因此，我们从描述求解(35)的$(h,\ H)$-FAS 两层网格法开始.

从 u_h^i 计算 u_h^{i+1} 的一步$(h,\ H)$-FAS 迭代可描述如下：

$$
\begin{array}{ccccccc}
u_h^i & \xrightarrow{\nu_1\ \text{relax}} & \bar{u}_h^i \rightarrow \bar{d}_h^i = f_h - A_h\bar{u}_h^i & & \hat{V}_h^i \rightarrow \bar{u}_h^i + \hat{V}_h^i & \xrightarrow{\nu_2\ \text{relax}} & u_h^{i+1} \\
 & & \downarrow I_h^H \qquad \downarrow I_h^H & & \uparrow I_H^h & & \\
 & & \bar{u}_H^i \qquad \bar{d}_H & \longrightarrow & A_H(\bar{u}_H^i + \hat{V}_H^i) - A_H\bar{u}_H^i = \bar{d}_H^i & &
\end{array}
$$

其中 relax 表示某一适当的具有误差光滑性质的非线性松弛过程. $\nu_1+\nu_2=\nu>0$. 与线性情形相比，不仅剩余量 $\bar{d}_h^i$ 限制到粗网格 Ω_H 上(由某个线性算子 I_h^H)，而且，近似解 $\bar{u}_h^i$ 也必须限制到粗网格 Ω_H 上(由某个线性算子 $\hat{I}_h^H$，它可以与 I_h^H 相同也可以不同). 这是因为在非线性情形，Ω_h 上的剩余方程由

$$A_h(\bar{u}_h^i+V_h^i)-A_h\bar{u}_h^i=d_h^i \quad i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{37}$$

给定. 此方程在 Ω_H 上由

$$A_H(\bar{u}_H^i+\hat{V}_H^i)-A_H\bar{u}_H^i=\bar{d}_H^i \quad i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{38}$$

或等价地由

$$\begin{cases} A_H W_H^i=\bar{d}_H^i+A_H\bar{u}_H^i \\ \hat{V}_H^i=W_H^i-\bar{u}_H^i \end{cases} \quad i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{39}$$

来逼近. 这就是说，在 FAS 格式中，粗网格 Ω_H 上不是求 u_h^i 的校正 $\hat{V}_H^i$，而是求它的完全逼近(full approximation)W_H^i. 但是变换到密网格 Ω_h 上的却是 $\hat{V}_H^i$ 而不是 W_H^i，这是由在本章§1 中所阐明的关于光滑步和校正步的性质所决定的，即在密网上由松弛过程所光滑，进而在粗网上充分逼近的仅仅是校正量和残量.

显然，如果 A_h 是线性算子，则$(h,\ H)$—FAS 两层网格法等价于线性两层网格法.

与线性多层网格法类似，在 FAS 多层网格法过程中，粗网格 Ω_H 上的非线性方程(39)不是精确求解，而是由使用更粗网格上的若干非线性多层网格迭代步逼近，这就导致了 FAS 多层网格法. 我们采用类似于本章§2 中的记号来描述求解

(35)的这一算法.

对于一个固定的$l\geqslant1$, $\nu_1+\nu_2=\nu>0$, 由u_l^i计算u_l^{i+1}的$(l+1)$—FAS多层网格法的一步迭代进程如下:

若$l=1$,即为(h, H)—FAS两层网格法,此时$\Omega_0=\Omega_H$, $\Omega_1=\Omega_h$.

若$l>1$:

(1) 光滑部分 I:

对u_l^i作$\nu_1(\geqslant0)$次光滑得$\bar{u}_l^i$:

$$\bar{u}_l^i=\mathrm{RELAX}^{\nu_1}(u_l^i,\ A_l,\ f_l).$$

(2) 粗网校正部分:

计算剩余量 $\bar{d}_l^i=f_l-A_l\bar{u}_l^i$;

限制剩余量 $\bar{d}_{l-1}^i=I_l^{l-1}\bar{d}_l^i$;

限制$\bar{u}_l^i$ $\bar{u}_{l-1}^i=\hat{I}_l^{l-1}\bar{u}_l^i$;

以$\bar{u}_{l-1}^i$为初值,实行$r(\geqslant1)$次l—FAS多层网格迭代(使用Ω_{l-1}, Ω_{l-2}, $\cdots$, Ω_0及相应的非线性网格算子)在Ω_{l-1}上求剩余方程:

$$A_{l-1}W_{l-1}^i=\bar{d}_{l-1}^i+A_{l-1}\bar{u}_{l-1}^i \tag{40}$$

的近似解$\tilde{W}_{l-1}^i$;

计算校正量 $\tilde{V}_{l-1}^i=\tilde{W}_{l-1}^i-\bar{u}_{l-1}^i$;

插值校正量 $\tilde{V}_l^i=I_{l-1}^l\tilde{V}_{l-1}^i$;

计算Ω_l上的校正近似 $\bar{u}_l^{i+1}=\bar{u}_l^i+\tilde{V}_l^i$.

(3) 光滑部分 II:

对$\bar{u}_l^{i+1}$作$\nu_2(\geqslant0)$次光滑得u_l^{i+1}:

$$u_l^{i+1}=\mathrm{RELAX}^{\nu_2}(\bar{u}_l^{i+1},\ A_l,\ f_l).$$

其中RELAX表示某一适当的具有误差光滑性质的非线性松弛过程.

由此进程可以看出，除了可能在最粗网格上外，FAS 多层网格法迭代过程中不需要任何整体线性化.

注 关于非线性松弛方法，在文献[38]、[26]中已有详尽的阐述，我们不再重复，但作为 FAS 多层网格法的光滑化方法，我们关心它们的光滑性质，为此，需要作一些补充说明. 为简便计，只考虑非线性 Jacobi 方法，对于其他的方法，可参看文献[36].

考虑弱非线性椭圆型方程的边值问题

$$\begin{cases}\Delta u = g(x,\ u) \text{ 于 } \Omega \text{ 内,}\\ u|_\Gamma = \varphi(x).\end{cases}$$

采用 5 点差分格式离散化后得非线性方程组

$$-\Delta_l u_l + g(x,\ u_l) = f_l \text{ 于 } \Omega_l \text{ 上.} \tag{41}$$

那么，若记 $-\Delta_l$ 的非对角部分为 $\overline{A}_l$，则有

$$-\Delta_l u_l = \overline{A}_l u_l + \frac{4}{h_l^2} u_l.$$

求解(41)的非线性 Jacobi-ω-Newton 松弛形式为

$$\begin{cases}\dfrac{4}{h_l^2}\overline{u}_l^{i+1} + \overline{A}_l u_l^i + g(x,\ u_l^i) + \nabla g(x,\ u_l^i)(\overline{u}_l^{i+1} - u_l^i) = f_l,\\ u_l^{i+1} = u_l^i + \omega(\overline{u}_l^{i+1} - u_l^i),\end{cases} \tag{42}$$

$$i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

其中 $\nabla g(x,\ u_l^i)$ 表示 $g(x,\ u_l)$ 在 $(x,\ u_l^i)$ 处的梯度.

求解(41)的非线性 Jacobi-ω-Picard 松弛形式

$$\begin{cases}\overline{u}_l^{i+1} = [f_l - \overline{A}_l u_l^i - g(x,\ u_l^i)] * h_l^2/4,\\ u_l^{i+1} = u_l^i + \omega(\overline{u}_l^{i+1} - u_l^i),\end{cases} \tag{43}$$

$$i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

例 $\begin{cases}-\Delta u + e^u = f \text{ 于 } \Omega \text{ 内,}\\ u|_\Gamma = \sin 3(x+y).\end{cases}$

其中 $f=e^{\sin 3(x+y)}+18\sin 3(x+y)$. 其精确解为 $u=\sin 3(x+y)$. 区域 Ω 如图 8.6 所示，它由半圆和直线围成. 除靠近边界的点外（这些点上采用了 Shortley-Weller 逼近，即不等距差分格式），均采用五点差分格式离散和正方形网格剖分.

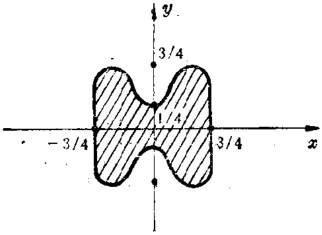


图 8.6

在间接算法中，方案 I 的每个 Newton 步执行一次 MG 循环，方案 II 的 MG 循环次数随着一个 Newton 步到下一个 Newton 步而逐次加倍.

在 FAS 算法中，非线性松弛方法是采用 RB-Newton 方法（非线性红黑-Newton 法）. 变换算子 $\hat{I}_l^{l-1}$ 采用直接投影算子.

两类算法均取零网格函数为初始近似.

表 8.1

多层网格迭代步	方法		
	间接算法		FAS
	方案 I	方案 II	
1	0.18(+2)	0.18(+2)	0.14(+2)
2	0.20(0)	0.20(0)	0.20(0)
3	0.55(−2)	0.86(−2)	0.54(−2)
4	0.14(−3)	0.14(−3)	0.14(−3)
5	0.42(−5)	0.43(−5)	0.42(−5)
6	0.13(−6)	0.13(−6)	0.13(−6)
7	0.39(−8)	0.47(−8)	0.39(−8)
8	0.12(−9)	0.13(−9)	0.12(−9)
9	0.40(−11)	0.42(−11)	0.39(−11)

表 8.1 展示了这个算法的数值结果.

表 8 中数据表示每个迭代步后相应于离散解的 $\|\cdot\|_2$-误差. 在此例中, FAS 与方案 I 给出了非常相近的结果. 从技术上讲, FAS 算法是三个方法中最简单的一个, Brandt 在文献[42]中指出了 FAS 还有其它优于间接算法的特点.

当然, 只有当初始近似充分靠近精确解时(此时 Newton 法有充分好的收敛性), 才可能期望方案 I 与 FAS 有数值上的相似性. 如果将例中 e^u 换为 λe^u, 那么对于 $\lambda \geqslant 0$, FAS 方法对初始近似的依赖性比方案 I 不敏感得多. 表 8.2 给出了 $\lambda = 100$ 时两者的数值结果对照 (都取零网格函数为初始近似).

表 8.2

MG 步	1	2	3	4	5	6
方案 II	0.26×10	0.33×10^2	0.38	0.67×10^{-2}	0.11×10^{-3}	0.19×10^{-5}
FAS	0.14×10^2	0.21	0.39×10^{-2}	0.75×10^{-4}	0.17×10^{-5}	0.41×10^{-7}

表 8.2 中数据表示每个迭代步后相应于离散解的 $\|\cdot\|_2$ 误差.

§ 5 Schwarz 型多层网格法

前面四节, 我们简要地介绍了线性和非线性多层网格法. 在此基础上, 本节将通过把它们与 S-算法结合起来而构造一类新算法–Schwarz 型多层网格法.

我们着重讨论线性多层网格法与 Schwarz 算法结合的情形. 对于非线性问题仅简略涉及.

早在 1981 年 Linden[8] 就研究多层网格法与 Schwarz

交替法的结合．他进行了较多的数值试验．1982 年 Stüben 与 Trottenberg[36]在讨论复合网格法时还引用 Linden 的数值试验结果．1984 年 Hackbusch[46]也讨论过这类算法．1985 年杨海刚[59]、邵建平[61]作了更一般的研究，把区域分裂法与 MG 方法相结合构造了一类适合于并行计算机的算法．

区域分裂法与 MG 算法的结合有两种主要方式．一种是直接结合，把区域分裂为适用于 MG 方法的正规形子区域，然后用 Schwarz 算法作外迭代，用 MG 算法作内迭代以解算子区域上的问题．这样构造的算法我们称它为 S-MG 算法．另一种是间接结合，只把 Schwarz 算法当作 MG 过程中的一种光滑步，这种结合称为 MG-S 算法．通常我们在应用 Schwarz 算法时都引进超松弛因子，这时就称它们为 S-OR-MG 算法（其离散形式称 B-OR-MG 算法）与 MG-S-OR 算法（或 MG-B-OR 算法）．

本节我们先讨论 S-MG 算法，然后讨论 MG-S 算法．

（一）S-MG 算法

我们仍考虑问题(1)、(2)．

若将区域 Ω 按第 6 章的要求分裂为 m 个子区域 Ω_j $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$．那么把原问题限制在每个子区域 Ω_j 上之后，就得到等价的问题集

$$\begin{cases} Au_j=f \text{ 于 } \Omega_j \text{ 内}, \\ u_j|_{\Gamma_j}=\varphi, \\ u_j|_{\Gamma'_j}=u_i|_{\Gamma_{ji}},\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m \end{cases} \tag{44}$$

其中 $\Gamma_{ji}=\Gamma'_j\cap\Omega_i$，对某些 i，它们可能是空集合．

设离散化参数为 h_l．它表示的意义与过去不尽相同，它既表示网格的步长，也表示在这种步长剖分下所得问题的规模，

即其足标 l 表示离散化后问题未知量的个数. 由于问题(1)、(2)的求解区域 Ω 为平面上的矩形区域. 为简化讨论, 我们设拟边界 Γ'_j 与网格线重合. Ω 的网域和网格函数空间分别记为 Ω_{h_l} 与 $G(\Omega_{h_l})$, 有时也记为 $G(\Omega_l)$. 与 Ω_j 相应的网域和网格函数空间分别记为 $\Omega_{l(j)}$ 与 $G(\Omega_{l(j)})$ $(j=1, 2, \cdots, m)$. 网域 $\Omega_{l(j)}$ 的边界集记为 $\Gamma_{l(j)}$ 与 $\Gamma'_{l(j)}$, 有时仍简记为 Γ_j 与 Γ'_j. 空间 $G(\Omega_l)$ 的维数为 l, $G(\Omega_{l(j)})$ 的维数为 $l(j)$. 由于子区域有重叠部分, 故一般有

$$l \leqslant \sum_{j=1}^{m} l(j).$$

当上式取"="号时, 相应的区域分裂称为简单分裂, 这时, 子区域之间的重叠部分只有一个网格的宽度.

在上述网格剖分下问题(1)、(2)离散化后得到线性方程组

$$A_l u_l = b_l. \tag{45}$$

而与之等价的问题集(44)则离散化为 m 组线性代数方程组

$$A_{l(j)} u_{l(j)} = b_{l(j)} \tag{46}$$

$$j=1, 2, \cdots, m.$$

其中 $u_{l(j)} \in G(\Omega_{l(j)})$. $A_{l(j)}$ 为 $l(j) \times l(j)$ 方阵,

$$A_{l(j)}: G(\Omega_{l(j)}) \to G(\Omega_{l(j)}).$$

问题集(46)是问题(45)的一种带有重叠方式的分裂, 即, 对固定的 j, 方程组(46)是由方程组(45)中的某些方程所组成. 当 $l=\sum_{j=1}^{m} l(j)$ 时, 则这种分裂就是通常的矩阵块分裂, 方程(46)只不过是把这种块分裂后的非对角块已移到右端与常向量右端合并了而已.

u_l 的分量 $u_l(x)$ 可分为两个集合:

$$u_{l(j)}=\{u_l(x)\,|\,x\in\Omega_{l(j)}\},$$

与
$$u_{l-l(j)}=\{u_l(x)\,|\,x\in\Omega_{h_l}-\Omega_{l(j)}\}.$$

由于拟边界值 $u_l|_{\Gamma_j}$ 是未知的. 故(46)的右端包含了未知量, 即

$$b_{l(j)}=b_{l(j)}(f_{l(j)},\ u_{l(i)}|_{\Gamma_j}).$$

其中 $i\in\{I\,|\,\Gamma_{jI}\neq 0,\ I=1,\ 2,\ \cdots,\ m\}$.

记

$$b^s_{l(j)}=b_{l(j)}(f_{l(j)},\ u^s_{l(i)}|_{\Gamma_j}).$$

求解问题(45)的 S-MG 算法描述于下.

给定初始猜测 u_l^0, 作函数序列$\{u_l^k\}$如下:

$$\begin{aligned}u_l^{k+\frac{j}{m}}=\{v_l\,|\,v_{l(j)}=\mathrm{MGI}^\gamma(u_{l(j)}^{k+\frac{j-1}{m}},\ A_{l(j)},\ b_{l(j)}^{k+\frac{j-1}{m}}),\ v_{l-l(j)}\\ =u_{l-l(j)}^{k+\frac{j-1}{m}}\},\end{aligned}\tag{47}$$

$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ m,$$
$$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

如果引进松弛因子, 则得 S-OR-MG 算法:

给定初始猜测 u_l^0, 作函数序列$\{u_l^k\}$如下:

$$\begin{cases}\hat{u}_l^{k+\frac{j}{m}}=\{v_l\,|\,v_{l(j)}=\mathrm{MGI}^\gamma(u_{l(j)}^{k+\frac{j-1}{m}},\ A_{l(j)},\ b_{l(j)}^{k+\frac{j-1}{m}}),\ v_{l-l(j)}\\ \qquad =u_{l-l(j)}^{k+\frac{j-1}{m}}\},\\ u_l^{k+\frac{j}{m}}=u_l^{k+\frac{j-1}{m}}+\omega(\hat{u}_l^{k+\frac{j}{m}}-u_l^{k+\frac{j-1}{m}}),\end{cases}\tag{47'}$$

$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ m,$$
$$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

由此可见, S-MG 算法 (或S-OR-MG) 不过是 Schwarz 算法的一个特殊情形, 即用 MG 算法来求解其离散的子问题(46). 所以我们称这种简单的结合方式为直接结合法. 这时算法的收敛速度是由 Schwarz 算法的收敛速度决定的, 只不

过是在S-算法中调用了MG算法作为解子问题的子程序以减少计算量而已.

定理8.2 若矩阵A_l对称正定，$B_l=2M_l-A_l$正定，则求解(45)的S-MG算法(47)所得到的近似解序列$\{u_l^k\}_0^\infty$收敛到(45)的解u_l^*.

证明 记对应于(46)中各方程组的泛函

$$J_{l(j)}(u_{l(j)})=\frac{1}{2}(A_{l(j)}u_{l(j)},\ u_{l(j)})-(b_{l(j)},\ u_{l(j)}),$$
$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ m.$$

对应于(45)的泛函

$$J_l(u_l)=\frac{1}{2}(A_lu_l,\ u_l)-(b_l,\ u_l).$$

由于
$$A_{l(j)}u_{l(j)}=b_{l(j)}$$
是(45)中的部分方程组成的. 若将u_l各分量重新排列成分块形式
$$\bar{u}_l=(u_{l(j)},\ u_{l-l(j)}),$$
相应地(45)可写成
$$\bar{A}_l\bar{u}_l=\bar{b}_l,$$
其中
$$\bar{A}_l=\begin{pmatrix} A_{l(j)} & -A_{l(j),l-l(j)} \\ -A'_{l(j),l-l(j)} & A_{l-l(j)} \end{pmatrix},$$
$$\bar{b}_l=(\bar{b}_{l(j)},\ \bar{b}_{l-l(j)}).$$
$$b_{l(j)}=\bar{b}_{l(j)}+A_{l(j),l-l(j)}u_{l-l(j)}.$$

故有
$$\begin{aligned}J_l(u_l)=\bar{J}_l(\bar{u}_l)&=\frac{1}{2}(\bar{A}_l\bar{u}_l,\ \bar{u}_l)-(\bar{b}_l,\ \bar{u}_l)\\&=\frac{1}{2}(A_{l(j)}u_{l(j)},\ u_{l(j)})-(b_{l(j)},\ u_{l(j)})\\&\quad+\frac{1}{2}(A_{l-l(j)}u_{l-l(j)},\ u_{l-l(j)})\\&\quad-(\bar{b}_{l-l(j)},\ u_{l-l(j)})\end{aligned}$$

$$=J_{l(j)}(u_{l(j)})+J_{l-l(j)}(u_{l-l(j)}),$$

其中

$$J_{l-l(j)}(u_{l-l(j)})=\frac{1}{2}(A_{l-l(j)}u_{l-l(j)},\ u_{l-l(j)})-(b_{l-l(j)},\ u_{l-l(j)}).$$

因矩阵 $A_{l(j)}(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 对称正定，由引理 8.2 可知，对每一个固定的 j，若 $B_{l(j)}=2M_{l(j)}-A_{l(j)}$ 正定，则序列 $\{J_{l(j)}(u_{l(j)}^{k+\frac{i}{m}})\}$ 关于 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$ 单调下降. 由此及 (47) 得

$$\begin{aligned}
J_l(u_l^{k+1})&=J_{l(m)}(u_{l(m)}^{k+1})+J_{l-l(m)}(u_{l-l(m)}^{k+1})\\
&=J_{l(m)}(u_{l(m)}^{k+1})+J_{l-l(m)}(u_{l-l(m)}^{k+\frac{m-1}{m}})\\
&\leqslant J_{l(m)}(u_{l(m)}^{k+\frac{m-1}{m}})+J_{l-l(m)}(u_{l-l(m)}^{k+\frac{m-1}{m}})=J_l(u_l^{k+\frac{m-1}{m}})\\
&=J_{l(m-1)}(u_{l(m-1)}^{k+\frac{m-1}{m}})+J_{l-l(m-1)}(u_{l-l(m-1)}^{k+\frac{m-2}{m}})\\
&\leqslant J_l(u_l^{k+\frac{m-2}{m}})\\
&\leqslant\cdots\\
&\leqslant J_l(u_l^{k+\frac{j}{m}})\\
&=J_{l(j)}(u_{l(j)}^{k+\frac{j}{m}})+J_{l-l(j)}(u_{l-l(j)}^{k+\frac{j-1}{m}})\\
&\leqslant J_{l(j)}(u_{l(j)}^{k+\frac{j-1}{m}})+J_{l-l(j)}(u_{l-l(j)}^{k+\frac{j-1}{m}})=J_l(u_l^{k+\frac{j-1}{m}})\\
&\leqslant\cdots\\
&\leqslant J_l(u_l^k).
\end{aligned}$$

若 $u_l^{k+1}\neq u_l^k$，必有 $J_l(u_l^k)>J_l(u_l^{k+1})$. 即序列 $\{J_l(u_l^k)\}_0^\infty$ 严格单调下降. 按照定理 8.3 的证明方法可以证明：当 $k\to\infty$ 时，有 $u_l^k\to u_l^*$. 定理证毕.

类似地，只要加上条件 $0<\omega<2$，则也可以证明 S-OR-MG 算法(47′)的收敛性.

前面讨论的 S-MG 算法(47) 与 S-OR-MG 算法 (47′) 都

是一种系统松弛法. 如果把 S-COR 算法与 MG 算法直接结合起来，则可构造出适用于并行计算机的混乱松弛算法：S-COR-MG 算法.

设并行计算机系统由 m 台处理机 P_1, P_2, $\cdots$, P_m 组成. 若指定第 j 台处理机运行第 j 个进程 Process P_j: $u_{l(j)}=\mathrm{MGI}^\gamma(u_{l(j)}, A_{l(j)}, b_{l(j)})$. 数组 u_l 当作整体变量. 设 u_l 的初始状态为 u_l^0. 计算开始后，它的分量 $u_{l(j)}$ 由进程 Process P_j 来更新其数据($j=1, 2, \cdots, m$)，以实现进程之间的信息(拟边界值)交换.

S-COR-MG 算法描述于下.

给定初始猜测 u_l^0，作近似解序列 $\{u_l^{k(j)}\}$ 如下：

$$\begin{cases} \hat{u}_l^{k(j)}=\{u_l \mid v_{l(j)} \\ \qquad =\mathrm{MGI}^\gamma(u_{l(j)}^{k-1}, A_{l(j)}, b_{l(j)}^{k-1}),\ v_{l-l(j)}=u_{l-l(j)}^{k-1}\}, \\ u_l^{k(j)}=u_l^{k-1}+\omega(\hat{u}_l^{k(j)}-u_l^{k-1}), \end{cases} \tag{48}$$

$$j\in M=\{1, 2, \cdots, m\},$$

$$k=1, 2, 3, \cdots.$$

这里，上标 $k(j)$ 表示第 k 步近似解 $u_l^{k(j)}$ 是以 u_l^{k-1} 为已知条件对(46)的第 j 个方程组进行 MG 迭代得到的. 或者说，此刻(第 k 步)的总体变量 u_l 是由过程 process P_j 进行数据更新的. 因此，带这种复合上标的近似解序列 $\{u_l^{k(j)}\}$ 不仅描述了它产生的顺序，也描述了它是怎样产生的. 为了保证 $\{u_l^{k(j)}\}$ 收敛到正确的解，像第 6 章那样，还要加上一些必要的条件. 为此，我们将网格函数序列 $\{u_l^{k(j)}\}$ 分成 m 个子函数序列：

$$\{u_l^{k_1(1)}\},\ \{u_l^{k_2(2)}\},\ \cdots,\ \{u_l^{k_m(m)}\}.$$

定义 当 $k\to\infty$ 时，若上标序列

$$\{k_j(j)\}\to\infty \quad \forall j\in M,$$

则称(48)为 S-COR-MG 算法(Schwarz-chaotic overrelaxa-

tion-Multigrid method).

定义所反映的物理要求是：进程 process P_j 每次读出整体变量 u_l，作 MG 迭代，然后更新 $u_{l(j)}$（部分整体变量的值）．m 个进程 process P_j（$j=1, 2, \cdots, m$）并行运行，只要各处理机中途不出现故障，则上述算法得以实现．运行中若某处理机（例如 P_i）出现了不能修复的故障，则相应地某上标集（$\{k_i(i)\}$）为一有限集，故必有界，因而不满足定义的条件．此时，函数序列 $\{u_i^{k_i(j)}\}$ 虽然仍收敛，但它并不收敛到问题(45)的解 u_i^*．

有了上述定义，按照定理 6.7 的证明思想及引理 8.2 和定理 8.4 的结果，可以证明 S-CR-MG 算法（$\omega=1$）的下述收敛性定理．

定理 8.3 当定理 8.2 的条件都满足时，求解问题(45)的 S-CR-MG 算法所产生的近似解序列 $\{u_i^{k_i(j)}\}$ 收敛到(45)的解 u_i^*．

Schwarz 算法也可以与非线性多层网格法 FAS 直接结合而构造出一类解非线性问题的 Schwarz 型多层网格法．又例如将第 7 节介绍的 P-S-COR 算法与 N-S-COR 算法与 MG 相结合，则可构造出另类非线性 Schwarz 型的多层网格法．由于基本思想已经清楚了．为了避免算法叙述的重复，也因为 FAS 算法的收敛性理论本身尚不成熟，所以这里就不再作更详细的讨论了．

（二）MG-S 算法（或 MG-B 算法）

我们仍然考虑问题(45)和与它等价的具有重叠分裂形式的问题集(46)．

MG-S 算法不同于 S-MG 算法，它只把 S-算法作为求解问题(45)的 MG 算法的光滑化方法．所以它不同于 S-MG 算法把复杂区域化成便于使用 MG 算法的规则形子区域，而在

于利用S-算法的优良的光滑性能. 为了证实S-算法的光滑性能，我们先深入地研究一下Schwarz交替法.

考察Dirichlet问题:

$$
\begin{cases}
-\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+q^2u=f(x,\ y) \\
\quad 于\ \Omega=\{(x,\ y)\,|\,0<x<1,\ 0<y<1\}, \\
u|_{\Gamma}=\varphi(x,\ y),
\end{cases}
\tag{49}
$$

其中 q 为常数.

把区域 Ω 分裂为具有重叠部分的两个子区域:

$$\Omega_1=\{(x,\ y)\,|\,0<x<x_k,\ 0<y<1\}$$

与

$$\Omega_2=\{(x,\ y)\,|\,x_l<x<1,\ 0<y<1\},$$

其中 $x_l<x_k$.

记 $x_k=x_l+d$, $d>0$. Ω_i 的边界为 $\Gamma_i(\Gamma_i\subset\Gamma)$ 与 $\Gamma_i'(\Gamma_i'\subset\Omega_j,\ i\neq j)$, $i=1,\ 2$. Γ_i' 称为拟边界.

问题(49)在 Ω_1 与 Ω_2 上的限制即等价的问题集

$$
\begin{cases}
-\Delta u_1+q^2u_1=f\ 于\ \Omega_1\ 内, \\
u_1|_{\Gamma_1}=\varphi, \\
u_1|_{\Gamma_1'}=u_2|_{\Gamma_1'},\ \Gamma_1'=\{(x,\ y)\,|\,x=x_k,\ 0<y<1\}
\end{cases}
\tag{50}
$$

$$
\begin{cases}
-\Delta u_2+q^2u_2=f\ 于\ \Omega_2\ 内, \\
u_2|_{\Gamma_2}=\varphi, \\
u_2|_{\Gamma_2'}=u_1|_{\Gamma_2'},\ \Gamma_2'=\{(x,\ y)\,|\,x=x_l,\ 0<y<1\}.
\end{cases}
\tag{51}
$$

解问题(49)的Schwarz交替法描述于下.

给定初始猜测 $u^{(0)}$，作函数序列 $\{u^{(i)}\}$ 如下:

$$
\begin{cases}
-\Delta u_1^{(i)}+q^2u_1^{(i)}=f\ 于\ \Omega_1\ 内, \\
u_1^{(i)}|_{\Gamma_1}=\varphi, \\
u_1^{(i)}|_{\Gamma_1'}=u_2^{(i-1)}|_{\Gamma_1'},\ u_2^{(0)}|_{\Gamma_1}=u^{(0)}(x_k,\ y).
\end{cases}
\tag{52}
$$

$$\begin{cases} -\Delta u_2^{(i)}+q^2u_2^{(i)}=f \text{ 于 } \Omega_2 \text{ 内}, \\ u_2^{(i)}\big|_{\Gamma_2}=\varphi, \\ u_2^{(i)}\big|_{\Gamma_2'}=u_1^{(i)}\big|_{\Gamma_2'}. \end{cases} \tag{53}$$

$$u^{(i)}=\begin{cases} u_1^{(i)} \text{ 于 } \Omega-\Omega_2 \text{ 上}, \\ u_2^{(i)} \text{ 于 } \Omega_2 \text{ 内}, \end{cases} \tag{54}$$

$$i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots.$$

记问题(49)的解为 u^*,误差函数为

$$e_1^{(i)}(x,\ y)=u^*(x,\ y)-u_1^{(i)}(x,\ y) \text{于 } \Omega_1 \text{ 上},$$

$$e_2^{(i)}(x,\ y)=u^*(x,\ y)-u_2^{(i)}(x,\ y) \text{于 } \Omega_2 \text{ 上},$$

则误差函数满足问题集:

$$\begin{cases} -\Delta e_1^{(i)}+q^2e_1^{(i)}=0 \text{ 于 } \Omega_1 \text{ 内}, \\ e_1^{(i)}\big|_{\Gamma_1}=0, \\ e_1^{(i)}\big|_{\Gamma_1'}=e_2^{(i-1)}\big|_{\Gamma_1'}. \end{cases} \tag{55}$$

$$\begin{cases} -\Delta e_2^{(i)}+q^2e_2^{(i)}=0 \text{ 于 } \Omega_2 \text{ 内}, \\ e_2^{(i)}\big|_{\Gamma_2}=0, \\ e_2^{(i)}\big|_{\Gamma_2'}=e_1^{(i)}\big|_{\Gamma_2'}, \end{cases} \tag{56}$$

$$i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots.$$

不失一般性,设初始误差有形式

$$e_2^{(0)}(x_k,\ y)=\sum_{m=1}^{\infty} b_m^{(0)} \sin m\pi y,$$

则问题集(55)、(56)的解为

$$e_1^{(i)}(x,\ y)=\sum_{m=1}^{\infty} a_m^{(i)} \frac{\operatorname{sh}\sqrt{m^2\pi^2+q^2}\,x}{\operatorname{sh}\sqrt{m^2\pi^2+q^2}\,x_k} \sin m\pi y \text{ 于 } \Omega_1 \text{ 上}, \tag{57}$$

$$e_2^{(i)}(x,\ y) =\sum_{m=1}^{\infty} b_m^{(i)} \frac{\operatorname{sh}\sqrt{m^2\pi^2+q^2}\,(1-x)}{\operatorname{sh}\sqrt{m^2\pi^2+q^2}\,(1-x_l)} \sin m\pi y \text{ 于 } \Omega_2 \text{ 上}, \tag{58}$$

其中 $$\operatorname{sh} px=(e^{px}-e^{-px})/2$$
为双曲正弦函数.

由(57)、(58)及拟边界条件 $e_1^{(i)}|_{\Gamma_1'}=e_2^{(i-1)}|_{\Gamma_1'}$ 及 $e_2^{(i)}|_{\Gamma_2'}=e_1^{(i)}|_{\Gamma_2'}$ 推得

$$\begin{cases} a_m^{(i)}=\dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{m^2\pi^2+q^2}(1-x_k)}{\operatorname{sh}\sqrt{m^2\pi^2+q^2}(1-x_l)}b_m^{(i-1)}, \\ b_m^{(i)}=\dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{m^2\pi^2+q^2}x_l}{\operatorname{sh}\sqrt{m^2\pi^2+q^2}x_k}a_m^i, \end{cases} \tag{59}$$

$$i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,$$

$$m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots.$$

由此得到误差函数的 Fourier 系数所满足的关系式

$$\begin{cases} a_m^{(i)}=\rho_{m,q}(x_l,\ x_k)a_m^{(i-1)}, \\ b_m^{(i)}=\rho_{m,q}(x_l,\ x_k)b_m^{(i-1)}, \end{cases} \tag{60}$$

其中

$$\rho_{m,q}(x_l,\ x_k)=\frac{\operatorname{sh}\sqrt{m^2\pi^2+q^2}x_l}{\operatorname{sh}\sqrt{m^2\pi^2+q^2}x_k}\cdot\frac{\operatorname{sh}\sqrt{m^2\pi^2+q^2}(1-x_k)}{\operatorname{sh}\sqrt{m^2\pi^2+q^2}(1-x_l)}. \tag{61}$$

由(59)、(60)得

$$\begin{aligned} a_m^{(i)}&=[\rho_{m,q}(x_l,\ x_k)]^{i-1}a_m^{(1)} \\ &=[\rho_{m,q}(x_l,\ x_k)]^{i-1}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{m^2\pi^2+q^2}(1-x_k)}{\operatorname{sh}\sqrt{m^2\pi^2+q^2}(1-x_l)}b_m^{(0)}, \end{aligned} \tag{62}$$

$$b_m^{(i)}=[\rho_{m,q}(x_l,\ x_k)]^i b_m^{(0)}. \tag{63}$$

以此代入(57)与(58)得

$$\begin{aligned} & e_1^{(i)}(x,\ y) \\ &=\sum_{m=1}^{\infty}\left\{[\rho_{m,q}(x_l,\ x_k)]^i\frac{\operatorname{sh}\sqrt{m^2\pi^2+q^2}x}{\operatorname{sh}\sqrt{m^2\pi^2+q^2}x_l}\right\}b_m^{(0)}\sin m\pi y, \end{aligned} \tag{64}$$

$e_2^{(i)}(x,\ y)$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ [\rho_{m,q}(x_l,\ x_k)]^i \frac{\operatorname{sh}\sqrt{m^2\pi^2+q^2}(1-x)}{\operatorname{sh}\sqrt{m^2\pi^2+q^2}(1-x_l)} \right\} b_m^{(0)} \sin m\pi y. \tag{65}$$

记 $$e^{(i)}(x,\ y) = u^*(x,\ y) - u^{(i)}(x,\ y).$$

由(54)、(64)与(65)得

$$e^{(i)}(x,\ y) = \sum_{m=1}^{\infty} [\rho_{m,q}(x_l,\ x_k)]^i \gamma_{m,q,x_l}(x) b_m^{(0)} \sin m\pi y, \tag{66}$$

其中

$$\gamma_{m,q,x_l}(x) = \begin{cases} \operatorname{sh}\sqrt{m^2\pi^2+q^2}x / \operatorname{sh}\sqrt{m^2\pi^2+q^2}x_l, & 0 < x \leqslant x_l, \\ \operatorname{sh}\sqrt{m^2\pi^2+q^2}(1-x) \\ \quad / \operatorname{sh}\sqrt{m^2\pi^2+q^2}(1-x_l), & x_l < x \leqslant 1, \end{cases}$$

故有 $|\gamma_{m,q,x_l}(x)| \leqslant 1$，且

$$\gamma_{m,q,x_l}(x_l) = 1 \tag{67}$$

由此及展开式(66)可知，误差 $e^i(x,\ y)$ 的极值只能在 $x = x_l$ 上达到．即

$$|e^{(i)}(x,\ y)| \leqslant |e^{(i)}(x_l,\ y)|.$$

而

$$e^{(i)}(x_l,\ y) = \sum_{m=1}^{\infty} [\rho_{m,q}(x_l,\ x_k)]^i b_m^{(0)} \sin m\pi y. \tag{68}$$

记 $$\|e^{(i)}(x_l,\ y)\|^2 = \int_0^1 [e^{(i)}(x_l,\ y)]^2 \mathrm{d}y.$$

由 Parseval 等式知

$$\|e^{(0)}(x_k,\ y)\| = \|e_2^{(0)}(x_k,\ y)\| = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} (b_m^{(0)})^2},$$

故 $$\|e^{(i)}(x_l,\ y)\| = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty} [\rho_{m,q}(x_l,\ x_k)]^{2i} (b_m^{(0)})^2}$$

$$\leqslant [\rho_{1,q}(x_l,\ x_k)]^i \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} (b_m^{(0)})^2}$$

$$= [\rho_{1,q}(x_l,\ x_k)]^i \|e^{(0)}(x_k,\ y)\|.$$

由此可见，解问题(49)的 Schwarz 交替法(52)、(53)的收敛因子为

$$\rho_{1,q}(x_l, x_k)=\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\pi^2+q^2}x_l}{\operatorname{sh}\sqrt{\pi^2+q^2}x_k}\cdot\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\pi^2+q^2}(1-x_k)}{\operatorname{sh}\sqrt{\pi^2+q^2}(1-x_l)}. \quad (69)$$

公式 (69) 不仅给出了解问题(49)时 S-算法(此时为 Schwarz 交替法)的收敛性，而且给出了拟边界的位置 x_l, x_k 以及子域区间的重叠面积的大小 $d=x_k-x_l$ 与收敛因子的关系.

如果用五点差分格式对问题(49)进行离散化，相应于 S-算法(52)(53)的离散化算法的网格误差函数也可以得到类似(66)的表达式及类似(69)的收敛因子. 如果按 y 方向进行分裂，也有同样的结论，只是表达式中的 x 与 y 互换一下而已.

现在我们关心的不只是 S-算法的收敛因子，更关心它的光滑性质. 因此我们把注意力集中在误差表达式(66)上，或者由于

$$|e^{(i)}(x, y)|\leqslant|e^{(i)}(x_l, y)|,$$

而使我们的注意力集中到表达式(68)上.

以函数系 $\{\sin m\pi y\}_{m=1}^{\infty}$ 为基底的线性空间 $L_2(0, 1)$ 分解为两个空间 $L_l(0, 1)$ 与 $L_h(0, 1)$，$L_2(0, 1)=L_l(0, 1)\oplus L_h(0, 1)$. 其中 $L_l(0, 1)$ 的基函数为 $\{\sin m\pi y\}_{m=1}^{M}$，$L_h(0, 1)$ 的基函数为 $\{\sin m\pi y\}_{m=M+1}^{\infty}$. $L_l(0, 1)$ 称为低频空间，$L_h(0, 1)$ 称为高频空间. 这时，误差 $e^{(i)}(x_l, y)$ 可表为

$$e^{(i)}(x_l, y)=e_l^{(i)}(x_l, y)+e_h^{(i)}(x_l, y),$$

其中 $$e_l^{(i)}(x_l, y)\in L_l,\ e_h^{(i)}(x_l, y)\in L_h,$$

分别称为误差的低频部分与误差的高频部分. 实际上，

$$e_l^{(i)}(x_l, y)=\sum_{m=1}^{M}[\rho_{m,q}(x_l, x_k)]^i b_m^{(0)}\sin m\pi y,$$

$$e_k^{(i)}(x_l, y)=\sum_{m=M+1}^{\infty}[\rho_{m,q}(x_l, x_k)]^i b_m^{(0)}\sin m\pi y.$$

由 $\rho_{m,q}(x_l, x_k)$是关于m的单调下降函数. 而且下降的速度很快. 例如,$\rho_{m,1}(3/8, 5/8)$的值有如下表(取5位小数):

表 8.3

m	1	2	3	4	5	6	7	8
ρ_m	0.16663	0.04087	0.00873	0.00183	0.00038	0.00008	0.00001	0.00000
ρ_m^2	0.02777	0.00167	0.00008	0.00000				

在这种情形: $q=1$, $x_l=3/8$, $x_k=x_l+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{8}$. 当$i=1$时,即用S-算法迭代一次,若取$M=7$,则误差的高频部分已小于$10^{-5}$了. 若$i=2$,即迭代两次,若取$M=3$,则误差的高频部分已小于$10^{-5}$. 低频空间$L_l$的维数越低,即$M$越小,则误差越光滑. 这时误差校正时可以在很粗的网格上去进行,而且校正效果很好. 在我们举例的这种情况,如果需要误差精度小于10^{-5},则只要在密网上应用S-算法迭代两次对误差进行光滑,此误差已落在3维低频空间了. 粗网校正时,甚只要取网步$h=1/4$就可以达到要求的精度了.

S-MG算法的收敛速度决定于收敛因子$\rho_{1,q}(x_l, x_k)$; 而MG-S算法的收敛速度则决定于$\rho_{M,q}(x_l, x_k)$, 它既决定了MG-S算法的与步长无关的收敛性质, 也决定了粗网校正时所需的步长.

从上面例子可以看到, 当$M=5$时, $\rho_{M,q}(x_l, x_k)$要比$\rho_{1,q}(x_l, x_k)$小1000倍. 故MG-S算法比S-MG算法要优越得多.

如果用S-OR算法来代替S-算法, 当ω取最佳超松弛因

子，其光滑性能更好，则收敛速度又会有很大的提高。

我们将离散的S-OR算法记为B-OR算法。现将解问题(45)(或(46))的一步B-OR迭代描述于下。

已给近似u_l^k，求$u_l^{k+\frac{j}{m}}$如下：

$$\begin{cases}\hat{u}_l^{k+\frac{j}{m}}=\{v_l \mid v_{l(j)}=A_{l(j)}^{-1}b_{l(j)}^{k+\frac{j-1}{m}},\ v_{l-l(j)}=u_{l-l(j)}^{k+\frac{j-1}{m}}\}, \\ u_l^{k+\frac{j}{m}}=u_l^{k+\frac{j-1}{m}}+\omega(\hat{u}_l^{k+\frac{j}{m}}-u_l^{k+\frac{j-1}{m}}),\end{cases} \tag{70}$$

$$j=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m.$$

简记为
$$u_l^{k+1}=\text{B-OR}(u_l^k,\ A_l,\ b_l). \tag{71}$$
其γ步B-OR迭代记为$\text{B-OR}^\gamma(u_l^k,\ A_l,\ b_l)$。

下面描述解问题(45)的MG-B-OR算法。

仍像以前那样先描述两层网格算法的一步迭代过程$(u_l^k\to u_l^{k+1})$：

(1) 光滑部分I：

对u_l^k作γ_1次光滑得

$$\bar{u}_l^k=\text{B-OR}^{\gamma_1}(u_l^k,\ A_l,\ b_l).$$

(2) 粗网校正部分： (72)

计算剩余量： $\bar{d}_l^k=f_l-A_l\bar{u}_l^k$；

限制剩余量(从密网$\Omega_{h_l}\to$粗网$\Omega_{h_{l'}}$)：

$$\bar{d}_{l'}^k=I_l^{l'}\bar{d}_l^k;$$

求解剩余方程： $A_{l'}\bar{V}_{l'}^k=\bar{d}_{l'}^k$；

插值校正$(\Omega_{h_{l'}}\to\Omega_{h_l})$： $\bar{V}_l^k=I_{l'}^l\bar{V}_{l'}^k$；

计算校正后的近似： $\bar{u}_l^{k+1}=\bar{u}_l^k+\bar{V}_l^k$.

(3) 光滑部分II：

对$\bar{u}_l^{k+1}$作γ_2次光滑得

$$u_l^{k+1}=\text{B-OR}^{\gamma_2}(\bar{u}_l^{k+1},\ A_l,\ b_l).$$

MG-B-OR 算法：只要在两层网格程序(72)中，以零为初始网格误差函数：$\overline{V}^k_{l'}=0$，递归调用过程(72)近似求解更粗网上的剩余方程

$$A_{l'}\overline{V}^k_{l'}=\overline{d}_{l'},$$

直到最粗网层上可以直接求解出剩余方程为止.

必须指出的是：方程(45)中的 l 表示未知向量的维数，而方程(18)中的 l 则是指网格的层数.

B-OR 算法是作为 MG 算法的一个光滑步骤，因此 MG-B-OR 算法本质上就是一个特殊的 MG 算法. 故其收敛性证明完全类似定理 8.3 的证明过程. 只要证明 B-OR 算法产生的序列 $\{J_l(u^k_l)\}$ 严格单调下降，则以下的证明就与引理 8.2 和定理 8.3 的证明相同. 事实上，我们已在第 5 章证明：若 A_l 对称正定，则当 $0<\omega<2$ 时，$\{J_l(u^k_l)\}$严格单调下降. 因此，对 MG-B-OR 算法，有下述收敛性定理成立.

定理 8.4 若矩阵 A_l 对称正定，$0<\omega<2$，且有

$$A_{l'}=I^{l'}_l A_l I^l_{l'};\quad \frac{1}{C}\|V_{l'}\|_{l'}\leqslant\|I^l_{l'}V_{l'}\|_l\leqslant C\|V_{l'}\|_{l'}$$
$$\forall V_{l'}\in G(\Omega_{l'}).$$

则求解(45)的 MG-B-OR 算法产生的序列收敛到(45)的解 u^*_l.

在结束本节的时候，我们叙述一个应用 Schwarz 型多层网格法的数值例子. 该例选自文献[8]，亦可在文献[36]中找到. 数值试验考虑了 Schwarz 交替法与 MG 算法结合的两种方式：直接结合法：S-MG 与间接结合法：MG-S. 试验结果认为：MG-S 算法对区域分裂的几何性质(例如，拟边界的位置、重叠部分的大小等)的依赖性比 S-MG 算法弱些.

考虑单位圆盘上的 Poisson 方程的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}-\Delta u=f \text{ 于 } \Omega=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2<1\},\\ u|_{\Gamma}=\varphi.\end{cases}$$

将 Ω 分裂为有重叠部分的两个子区域:

$$\Omega_1=\{(x,\ y)\,|\,r_1<x^2+y^2<1\},$$

Ω_2 是以原点为中心、以 r_2 为半径的圆的内接八边形，$r_1<r_2\leqslant 1$，如图 8.7 所示.

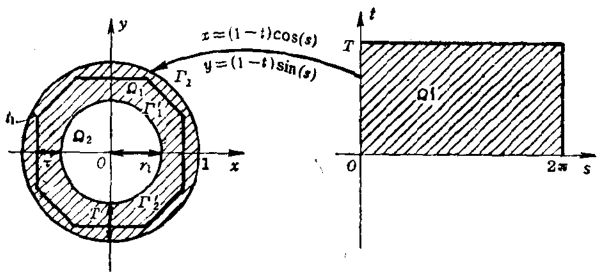


图 8.7

因为 Ω_1 是环形区域，使用 MG 算法不方便. 我们设法把它变换成为一个矩形区域. 也就是说要在一个合适的直交变换之下，使得 Ω_1 恰好是矩形区域

$$\Omega_1'=\{(s,\ t)\,|\,0<s\leqslant 2\pi,\ 0<t<T\}$$

的像. 这个变换是:

$$\begin{cases}x=(1-t)\cos(s),\\ y=(1-t)\sin(s).\end{cases}$$

我们可以把它想像为: 把环形 Ω_1 沿 x 轴的正半轴剪开，这个切口的上、下边分别对应于矩形区域 Ω_1' 左、右端两个边界，$\Gamma_1=\Gamma$ 对应矩形 Ω_1' 的下边界，Ω_1 的拟边界 Γ_1' 就对应 Ω_1' 的上端边界.

在此变换下，Laplace 算子 $(-\Delta)$ 就变为

$$-\Delta^*=\frac{1}{1-t}\left(\frac{1}{1-t}\frac{\partial^2}{\partial s^2}+\frac{\partial}{\partial t}\left((1-t)\frac{\partial}{\partial t}\right)\right).$$

在 Ω_2 内取正方形网格，算子$(-\Delta)$按5-点差分格式离散：

$$-\Delta_h u_{ij}=\begin{bmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{bmatrix}u_{ij},\quad (x_i,\ y_j)\in\Omega_{2,h},$$

h 为网格区域 $\Omega_{2,h}$ 的步长.

在 Ω_1' 内取矩形网格，$h_s=2\pi/N_s$, $h_t=T/N_t$，其中 N_s 与 N_t 为正整数.

记 $q=h_s/h_t$，网域为 $\Omega'_{1\ H}$，$H=(h_s,\ h_t)$. $v_{ij}=v(s_i,\ t_j)$，$(s_i,\ t_j)\in\Omega'_{1,H}$. $(-\Delta^*)$离散化为

$$-\Delta_H^* v_{ij}$$

$$=\frac{1}{h_s^2(1-jh_t)}\begin{bmatrix} & -q^2(1-jh_t-h_t/2) & \\ \frac{-1}{1-jh_t} & -\Sigma & \frac{-1}{1-jh_t} \\ & -q^2(1-jh_t+h_t/2) & \end{bmatrix}v_{ij},$$

其中 Σ 是周围四个系数之和.

MG-S 算法用在复合网格上时主要是拟边界值的交换. 若第 k 次近似 $u_{ij}^{(k)}$ 在 $\Omega_{2,h}$ 上已知时，通常采用下述四个步骤来作 Schwarz 交替光滑步:

(1) 将 $u_{i,j}^{(k)}$之值插值到 Γ_1' 的离散点上去;

(2) 在 $\Omega'_{1,H}$ 上作一步松弛迭代，得到 $v_{ij}^{(k)}$;

(3) 将 $v_{ij}^{(k)}$之值插值到 Γ_2' 的离散点上去;

(4) 在 $\Omega_{2,h}$ 上作一步松弛迭代，得到 $u_{ij}^{(k+1)}$.

MG-S 算法用在复合网格上时，我们规定

(1) 稀疏化方式: 在 Ω_1' 与 Ω_2 上都用步长加倍的方式;

(2) 网格算子: 粗网算子与密网算子的构造方法相同;

(3) 循环类型：采用 W-循环；

(4) 松弛迭代在子区域上都用适当方向的线松弛法(ZEBRA)(也可采用红-黑松弛法)；

(5) 拟边界值交换均采用三次插值公式.

进行数值试验时引进了两个参数：τ 表示子区域之间的重叠大小；t_1 表示 Γ_2' 至 Γ 的距离. 改变这两个参数来测试区域分裂的几何性质对算法的影响. 表 8.3 列出了不同参数对应的收敛因子. 其中第 2、3 两列表明对 MG-S 算法而言，收敛因子实际上与 τ 和 t_1 无关，甚至对很小的 τ 和大的 t_1 也如此. 从表中第 4、5 列看到，对 S-MG 算法则情况不同了，它的收敛因子对 τ 和 t_1 很敏感，重叠面越大，收敛越快.

表 8.4 数值计算得的收敛因子($\gamma_1=\gamma_2=1$)

τ	MG-S		S-MG	
	$t_1=0.0$	$t_1=0.5$	$t_1=0.0$	$t_1=0.5$
0.30	0.057	0.060	0.067	0.335
0.26	0.057	0.059	0.086	0.411
0.22	0.057	0.059	0.119	0.462
0.18	0.057	0.059	0.159	0.527
0.14	0.055	0.059	0.215	0.602
0.10	0.057	0.059	0.303	0.687
0.08	0.058	0.059	0.368	0.734
0.06	0.067	0.062	0.448	0.783

第 9 章

Schwarz 算法的收敛速度

§1 引　　言

Schwarz 算法是区域分裂的迭代解法的总称. 人们已经知道了 Schwarz 算法的收敛性. 人们从计算的实践中也了解到它的收敛速度是与区域的分裂方式有关的. 一般说来，重叠的部分越多，则收敛越快. 但是从未得到重叠区域的大小与收敛速度之间的精确关系. 因此，长期以来人们不能对这一方法作出正确的评价.

对于一些典型的问题，我们最近得到了一些深刻而有趣的结果，从而正确地回答了前面提到的这个一百多年以来未得回答的问题.

我们先介绍一维问题，然后介绍高维问题. 先讨论第一边值问题，然后讨论 Neumann 问题. 最后介绍加速 Schwarz 算法的收敛性的几种方法.

§2 一维问题的收敛速度[75][79][81][85]

考虑两点边值问题

$$\begin{cases} Ly \equiv -\dfrac{d^2y}{dx^2}+q^2y=f \text{ 于 } \Omega=\{x\,|\,0<x<1\}\text{内}, \\ y(0)=a,\ y(1)=b, \end{cases} \tag{1}$$

其中 q 为常数.

将区域分裂为 m 个具有重叠部分的子区域:

$$\Omega_j=\{x \mid x_j^{(1)}<x<x_j^{(2)}\},\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m,$$

其中 $x_1^{(1)}=0,\ x_m^{(2)}=1$, 且 $x_j^{(1)}<x_j^{(2)},\ x_i^{(1)}<x_{i+1}^{(1)}<x_i^{(2)},$

$$x_{i+1}^{(1)}<x_i^{(2)}<x_{i+1}^{(2)},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1.$$

考虑求解问题(1)的两种 Schwarz 算法:

Jacobi 型算法:

$$\begin{cases} Ly_j^{(i+1)}=f \text{ 于 } \Omega_j \text{ 内}, \\ y_j^{(i+1)}(x_j^{(1)})=y_{j-1}^{(i)}(x_j^{(1)}),\ y_j^{(i+1)}(x_j^{(2)})=y_{j+1}^{(i)}(x_j^{(2)}), \end{cases} \tag{2}$$

$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

以及

Gauss-Seidel 型算法:

$$\begin{cases} Ly_j^{(i+1)}=f \text{ 于 } \Omega_j \text{ 内}, \\ y_j^{(i+1)}(x_j^{(1)})=y_{j-1}^{(i+1)}(x_j^{(1)}),\ y_j^{(i+1)}(x_j^{(2)})=y_{j+1}^{(i)}(x_j^{(2)}), \end{cases} \tag{3}$$

$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ i=0,1,\ 2,\ \cdots.$$

其中 $y_1^{(i+1)}(0)=a,\ \ y_m^{(i+1)}(1)=b$ 不随 i 而变化, $y_j^{(0)}$为初始猜测值.

我们先讨论算法(2). 记(1)的解为 $y^*(x)$. 算法(2)的误差记为 $e_j^{(i)}=y^*-y_j^{(i)}$, 它满足问题:

$$\begin{cases} Le_j^{(i+1)}=0 \text{ 于 } \Omega_j \text{ 内}, \\ e_j^{(i+1)}(x_j^{(1)})=e_{j-1}^{(i)}(x_j^{(1)}),\ e_j^{(i+1)}(x_j^{(2)})=e_{j+1}^{(i)}(x_j^{(2)}), \end{cases} \tag{4}$$

$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

其中 $e_1^{(i+1)}(0)=e_m^{(i+1)}(1)=0$, $e_j^{(0)}$为初始误差.

问题(4)的解为

$$e_j^{(i+1)}(x)=r_j^{(1)}(x)e_{j-1}^{(i)}(x_j^{(1)})+r_j^{(2)}(x)e_{j+1}^{(i)}(x_j^{(2)}),$$

$$x_j^{(1)}\leqslant x\leqslant x_j^{(2)}, \tag{5}$$

$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

其中 $\begin{cases} r_j^{(1)}(x)=\operatorname{sh} q(x-x_j^{(2)})/\operatorname{sh} q(x_j^{(1)}-x_j^{(2)}), \\ r_j^{(2)}(x)=\operatorname{sh} q(x-x_j^{(1)})/\operatorname{sh} q(x_j^{(2)}-x_j^{(1)}), \\ e_0^{(i)}(x_1^{(1)})=e_{m+1}^{(i)}(x_m^{(2)})=0. \end{cases}$

不难证明，有

$$0\leqslant r_j^{(1)}(x)\leqslant 1、0\leqslant r_j^{(2)}(x)\leqslant 1, \text{当 } x\in[x_j^{(1)}, x_j^{(2)}], \tag{6}$$

$$0\leqslant r_j^{(1)}(x)+r_j^{(2)}(x)<1, \text{当 } x\in(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}), \tag{7}$$

由(5)～(7)得

$$|e_j^{(i+1)}(x)|\leqslant\max\{|e_{j-1}^{(i)}(x_j^{(1)})|, |e_{j+1}^{(i)}(x_j^{(2)})|\},$$
$$j=1, 2, \cdots, m, \tag{8}$$

此即最大模原理．由此可知，为了研究算法(2)的收敛速度，只要估计误差函数 $e_j^{(i)}(x)$ 在拟边界点 $x_j^{(1)}$ 与 $x_j^{(2)}$ 上的值就行了．这只要把它们写成矩阵形式，其传播(迭代)矩阵 T 的谱半径 $\rho(T)$ 即算法(2)的收敛因子．为简单起见，我们考虑如下特例：

拟边界点：

$$x_j^{(1)}=(j-1)/(m+1), \quad x_j^{(2)}=(j+1)/(m+1).$$

这时有 $x_{j+1}^{(1)}=x_{j-1}^{(2)}$, $j=2, 3, \cdots, m-1$.

记 $e^{(i)}=\left(e_1^{(i)}\left(\frac{1}{m+1}\right), e_2^{(i)}\left(\frac{2}{m+1}\right), \cdots, e_m^{(i)}\left(\frac{m}{m+1}\right)\right)^T.$

由(5)得

$$e^{(i+1)}=Te^{(i)}, \quad i=0, 1, 2, \cdots. \tag{9}$$

其中 T 为三对角矩阵，且对角线元素为零，非对角元素为：

$$t_{j,j-1}=r_j^{(1)}(j/(m+1)), \quad t_{j,j+1}=r_j^{(2)}(j/(m+1)),$$

这时算法(2)的收敛因子 $\rho(T)$ 有估计式：

$$\rho(T)\leqslant\|T\|_1=\max_j[r_j^{(1)}(j/(m+1))+r_j^{(2)}(j/(m+1))]$$
$$=2\operatorname{sh}(q/(m+1))/\operatorname{sh}(2q/(m+1))<1. \tag{10}$$

在一般情况下，利用(6)与(7)也可证明有 $\rho(T)<1$，即算法(2)收敛.

下面讨论算法(3)的收敛速度. 这时，误差函数 $e_j^{(i)}(x)$ 满足问题:

$$\begin{cases} Le_j^{(i+1)}=0 \text{ 于 } \Omega_j \text{ 内}, \\ e_j^{(i+1)}(x_j^{(1)})=e_{j-1}^{(i+1)}(x_j^{(1)}),\ e_j^{(i+1)}(x_j^{(2)})=e_{j+1}^{(i)}(x_j^{(2)}), \end{cases} \tag{11}$$

$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

其中 $e_0^{(i+1)}(0)=e_{m+1}^{(i+1)}(1)=0$, $e_{j+1}^{(0)}(x_j^{(2)})$, $j=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$, 为初始误差.

问题(11)的解为:

$$e_j^{(i+1)}(x)=r_j^{(1)}(x)e_{j-1}^{(i+1)}(x_j^{(1)})+r_j^{(2)}(x)e_{j+1}^{(i)}(x_j^{(2)}),$$
$$x_j^{(1)}\leqslant x\leqslant x_j^{(2)}, \tag{12}$$
$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

容易证明，最大模原理也成立:

$$|e_j^{(i+1)}(x)|\leqslant\max\{|e_{j-1}^{(i+1)}(x_j^{(1)})|,\ |e_{j+1}^{(i)}(x_j^{(2)})|\},$$
$$x\in[x_j^{(1)},\ x_j^{(2)}].$$

由(12)可得误差在拟边界点上的递推公式. 实际上，若记

$$e^{(i)}=(e_2^{(i)}(x_1^{(2)}),\ e_3^{(i)}(x_2^{(2)}),\ \cdots,\ e_j^{(i)}(x_{j-1}^{(2)}),\ \cdots,\ e_m^{(i)}(x_{m-1}^{(2)}))^T,$$

则有

$$e^{(i+1)}=T^*e^{(i)},\ i=0,\ 1,\ 2\cdots. \tag{13}$$

其中传播矩阵 T^* 为 $(m-1)$ 阶下 Hessenberg 矩阵:

$$T^*=(t_{j,k}),\ j=2,\ 3,\ \cdots,\ m;\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ j.$$

其非零元素有表达式

$$t_{j,j}=r_j^{(2)}(x_{j-1}^{(2)}),$$

$$t_{j,k}=r_j^{(1)}(x_{j-1}^{(2)})\cdot r_{j-1}^{(1)}(x_j^{(1)})\cdot r_{j-2}^{(1)}(x_{j-1}^{(1)})\cdots r_{k+1}^{(1)}(x_{k+2}^{(1)})$$
$$\cdot r_k^{(2)}(x_{k+1}^{(1)}),\ j\neq k.$$

Gauss-Seidel 型 Schwarz 算法 (3) 的收敛因子为矩阵 T^* 的谱半径 $\rho(T^*)$. 若 $x_{j+1}^{(1)}=x_{j-1}^{(2)}$, $j=2,\ 3,\ \cdots,\ m-1$, 则有

$$t_{j,k}=r_k^{(2)}(x_{k+1}^{(1)})\cdot\prod_{n=k+1}^{j} r_n^{(1)}(x_{n+1}^{(1)}).$$

由不等式(6)、(7), 易证有

$$\sum_{k=1}^{j} t_{j,k}<1,\ j=2,\ 3,\ \cdots,\ m. \tag{14}$$

由(13)、(14)得

$$\rho(T^*)\leqslant\|T^*\|_1<\|T\|_1<1. \tag{15}$$

这表明 Gauss-Seidel 型算法 (3) 比 Jacobi 型算法 (2) 收敛得快些.

当 $m=2$ 时, 算法(3)就是 Schwarz 交替法. 这时有收敛因子

$$\rho(T^*)=\frac{\operatorname{sh} qx_2^{(1)}}{\operatorname{sh} qx_1^{(2)}}\cdot\frac{\operatorname{sh} q(1-x_1^{(2)})}{\operatorname{sh} q(1-x_2^{(1)})}. \tag{16}$$

记 $x_1^{(2)}=x_2^{(1)}+d$, $d>0$ 表示子区域 Ω_1 与 Ω_2 重叠部分的大小. 则(16)可改写为

$$\rho(T^*)=\frac{\operatorname{sh} qx_2^{(1)}}{\operatorname{sh} q(x_2^{(1)}+d)}\cdot\frac{\operatorname{sh} q(1-x_2^{(1)}-d)}{\operatorname{sh} q(1-x_2^{(1)})}.$$

固定重叠部分的大小 d 时, 选取 $x_2^{(1)}$ 使 $\rho(T^*)$ 达到最大, 有

$$x_2^{(1)}=(1-d)/2.$$

这时
$$x_1^{(2)}=(1+d)/2,$$

而

$$\rho(T^*)=\left(\operatorname{sh} q\left(\frac{1-d}{2}\right)\Big/\operatorname{sh} q\left(\frac{1+d}{2}\right)\right)^2. \tag{17}$$

也就是说, 在固定重叠部分的大小条件下, 对称的区域分裂方式, 即 Ω_1 与 Ω_2 的大小相等时, Schwarz 交替法收敛最慢.

这里关于收敛因子的估计是精确的, 也就是说它不能再改进了. 如(16), 它深刻地描述了 Schwarz 交替法的全部收

敛特征，包括收敛速度与区域重叠大小之间的关系；收敛速度与拟边界点的位置的关系.

对于 Neumann 问题，也可进行类似的讨论. 为简单起见，我们只考虑 Schwarz 交替法.

考虑 Neumann 问题：

$$\begin{cases} Ly \equiv -\dfrac{d^2y}{dx^2} + q^2y = f, \text{于 } \Omega\{x \mid 0 < x < 1\} \text{内}, \\ \dfrac{dy(0)}{dx} = a, \quad \dfrac{dy(1)}{dx} = b. \end{cases} \tag{18}$$

解问题(18)的 Schwarz 交替法：

$$\begin{cases} Ly_j^{(i+1)} = f \text{ 于 } \Omega_j \text{ 内}, \\ y_j'^{(i+1)}(x_j^{(1)}) = y_{j-1}'^{(i+1)}(x_j^{(1)}), \quad y_j'^{(i+1)}(x_j^{(2)}) = y_{j+1}'^{(i)}(x_j^{(2)}), \end{cases} \tag{19}$$

$$j = 1, 2; \ i = 0, 1, 2, \cdots.$$

其中 $y_0'^{(i+1)}(x_1^{(1)}) = a$, $y_3'^{(i)}(x_2^{(2)}) = b$, $y_2'^{(0)}(x_1^{(2)})$ 为初值.

这时，误差函数满足问题：

$$\begin{cases} Le_j^{(i+1)} = 0 \text{ 于 } \Omega_j \text{ 内}, \\ e_j'^{(i+1)}(x_j^{(1)}) = e_{j-1}'^{(i+1)}(x_j^{(1)}), \quad e_j'^{(i+1)}(x_j^{(2)}) = e_{j+1}'^{(i)}(x_j^{(2)}), \end{cases} \tag{20}$$

$$j = 1, 2; \ i = 0, 1, 2, \cdots.$$

其中 $e_0'^{(i+1)}(x_1^{(1)}) = 0$, $e_3'^{(i)}(x_2^{(2)}) = 0$, $e_2'^{(0)}(x_1^{(2)})$ 为初始误差. 问题(20)的解为

$$e_j^{(i+1)}(x) = \frac{1}{q}\left[\frac{\operatorname{ch} q(x - x_j^{(2)})}{\operatorname{sh} q(x_j^{(1)} - x_j^{(2)})} e_{j-1}'^{(i+1)}(x_j^{(1)}) + \frac{\operatorname{ch} q(x - x_j^{(1)})}{\operatorname{sh} q(x_j^{(2)} - x_j^{(1)})} e_{j+1}'^{(i)}(x_j^{(2)})\right],$$

即

$$e_1^{(i+1)}(x) = \frac{1}{q} \frac{\operatorname{ch} qx}{\operatorname{sh} qx_1^{(2)}} e_2'^{(i)}(x_1^{(2)}), \tag{21}$$

$$e_2^{(i+1)}(x)=\frac{1}{q}\frac{\operatorname{ch} q(x-1)}{\operatorname{sh} q(x_2^{(1)}-1)}e_1'^{(i+1)}(x_2^{(1)}). \tag{22}$$

由(21)与(22)得

$$e_1'^{(i+1)}(x_2^{(1)})=\frac{\operatorname{sh} qx_2^{(1)}}{\operatorname{sh} qx_1^{(2)}}e_2'^{(i)}(x_1^{(2)}), \tag{23}$$

$$e_2'^{(i+1)}(x_1^{(2)})=\frac{\operatorname{sh} q(x_1^{(2)}-1)}{\operatorname{sh} q(x_2^{(1)}-1)}e_1'^{(i+1)}(x_2^{(1)}). \tag{24}$$

将(23)、(24)代入(21)与(22)右端可得

$$e_1^{(i+1)}(x)=\frac{1}{q}\rho^i\frac{\operatorname{ch} qx}{\operatorname{sh} qx_1^{(2)}}e_2'^{(0)}(x_1^{(2)}), \tag{25}$$

$$e_2^{(i+1)}(x)=\frac{1}{q}\rho^i\frac{\operatorname{ch} q(x-1)}{\operatorname{sh} q(x_2^{(1)}-1)}e_2'^{(0)}(x_1^{(2)}). \tag{26}$$

其中
$$\rho=\frac{\operatorname{sh} qx_2^{(1)}}{\operatorname{sh} qx_1^{(2)}}\cdot\frac{\operatorname{sh} q(x_1^{(2)}-1)}{\operatorname{sh} q(x_2^{(1)}-1)}.$$

即用 Schwarz 交替法解 Neumann 问题时与解 Dirichlet 问题有相同的收敛速度.

§3 二维问题的收敛速度[75][80][81][83][85][86][87][88]

考虑二维 Dirichlet 问题:

$$\begin{cases}Lu\equiv-\Delta u+q^2u=f,\ \text{于}\ \Omega=\{(x,y)|0<x<1,0<y<1\}\text{内},\\ u|_\Gamma=\varphi,\ \Gamma\ \text{为}\ \Omega\ \text{的边界}.\end{cases} \tag{27}$$

将区域 Ω 分裂为 m 个子区域:

$\Omega_j=\{(x,\ y)\,|\,x_j^{(1)}<x<x_j^{(2)},\ 0<y<1\}$, $j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$,
其中 $x_1^{(1)}=0$, $x_m^{(2)}=1$. 并设 $x_j^{(1)}<x_j^{(2)}$, $x_i^{(1)}<x_{i+1}^{(1)}<x_i^{(2)}$,

$$x_{i+1}^{(1)}<x_i^{(2)}<x_{i+1}^{(2)},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1.$$

记 $\Gamma_j^{(1)}=\{(x,\ y)\,|\,x=x_j^{(1)},\ 0<y<1\}$, $\Gamma_j^{(2)}=\{(x,\ y)\,|\,x=x_j^{(2)},\ 0<y<1\}$, $j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$, 它们与 Γ 组成子区域 Ω_j 的

边界.

解问题(27)的 Gauss-Seidel 型 Schwarz 算法为:

$$\begin{cases} Lu_j^{(i+1)}=f \text{ 于 } \Omega_j \text{ 内}, \\ u_j^{(i+1)}=\varphi \text{ 于 } \Gamma \text{ 上}, \\ u_j^{(i+1)}=u_{j-1}^{(i+1)} \text{ 于 } \Gamma_j^{(1)} \text{ 上}, \\ u_j^{(i+1)}=u_{j+1}^{(i)} \text{ 于 } \Gamma_j^{(2)} \text{ 上}, \end{cases} \tag{28}$$

$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

其中 $u_0^{(i+1)}=\varphi$, $u_{m+1}^{(i)}=\varphi$, $u_j^{(0)}$为初始猜测.

若(28)中在 $\Gamma_j^{(1)}$上的拟边值条件换成:

$$u_j^{(i+1)}=u_{j-1}^{(i)} \text{ 于 } \Gamma_j^{(1)} \text{ 上}, \tag{29}$$

则得 Jacobi 型 Schwarz 算法.

我们先讨论 Jacobi 型算法的收敛速度.

记问题(27)的解为 u^*, 误差 $e_j^{(i+1)}=u^*-u_j^{(i+1)}$于 $\bar{\Omega}_j$ 上.

设初始误差 $e_{j+1}^{(0)}(x_j^{(2)},\ y)$与 $e_{j-1}^{(0)}(x_j^{(1)},\ y)$可展成级数:

$$\begin{cases} e_{j+1}^{(0)}(x_j^{(2)},\ y)=\sum_{k=1}^{\infty} a_{j+1,k}^{(0)} \sin k\pi y,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1, \\ e_{j-1}^{(0)}(x_j^{(1)},\ y)=\sum_{k=1}^{\infty} b_{j-1,k}^{(0)} \sin k\pi y,\ j=2,\ 3,\ \cdots,\ m. \end{cases} \tag{30}$$

则可求得误差函数为:

$$e_j^{(i+1)}(x,\ y)=\sum_{k=1}^{\infty}[b_{j-1,k}^{(i)} r_{j,k}^{(1)}(x)+a_{j+1,k}^{(i)} r_{j,k}^{(2)}(x)]\sin k\pi y \tag{31}$$

$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

其中

$$\begin{cases} r_{1,k}^{(1)}(x)=0,\ r_{m,k}^{(2)}(x)=0, \\ r_{j,k}^{(1)}(x)=\operatorname{sh}\theta_k(x-x_j^{(2)})/\operatorname{sh}\theta_k(x_j^{(1)}-x_j^{(2)}), \\ r_{j,k}^{(2)}(x)=\operatorname{sh}\theta_k(x-x_j^{(1)})/\operatorname{sh}\theta_k(x_j^{(2)}-x_j^{(1)}), \end{cases} \tag{32}$$

式中 $\theta_k=\sqrt{k^2\pi^2+q^2}$.

记

$$\begin{cases} e_j^{(i)}(x_{j-1}^{(2)},\ y)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{j,k}^{(i)}\sin k\pi y, \\ e_j^{(i)}(x_{j+1}^{(1)},\ y)=\sum_{k=1}^{\infty}b_{j,k}^{(i)}\sin k\pi y, \end{cases} \tag{33}$$

由(31)得:

$$\begin{cases} a_{j,k}^{(i+1)}=b_{j-1,k}^{(i)}r_{j,k}^{(1)}(x_{j-1}^{(2)})+a_{j+1,k}^{(i)}r_{j,k}^{(2)}(x_{j-1}^{(2)}), \\ b_{j,k}^{(i+1)}=b_{j-1,k}^{(i)}r_{j,k}^{(1)}(x_{j+1}^{(1)})+a_{j+1,k}^{(i)}r_{j,k}^{(2)}(x_{j+1}^{(1)}), \end{cases} \tag{34}$$

$$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots;\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

记 $E_k^{(i)}=(b_{1,k}^{(i)},a_{2,k}^{(i)},b_{2,k}^{(i)},\cdots,a_{j,k}^{(i)},b_{j,k}^{(i)},\cdots,a_{m-1,k}^{(i)},b_{m-1,(k}^{(i)},a_{m,k}^{(i)})^T$,则由(32)与(34)得

$$E_k^{(i+1)}=T_kE_k^{(i)},\ k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots;\ i=0,\ 1,\ 2\cdots. \tag{35}$$

其中 T_k 与(9)中的 T 有相同的构造,如果以(32)中的 $r_{j,k}^{(s)}(x)$ 代替 T 中的 $r_j^{(s)}(x)$, $s=1,\ 2$.

由(32)可证得:

$$\begin{cases} 0\leqslant r_{j,k}^{(s)}(x)\leqslant 1,\ x\in[x_j^{(1)},\ x_j^{(2)}],\ s=1,\ 2, \\ 0<r_{j,k}^{(1)}(x)+r_{j,k}^{(2)}(x)<1;\ x\in(x_j^{(1)},\ x_j^{(2)}), \\ r_{j,k+1}^{(s)}(x)<r_{j,k}^{(s)}(x),\ k=1,\ 2,\ 3\cdots. \end{cases} \tag{36}$$

由此可知

$$\rho(T_k)<1 \tag{37}$$

且

$$\rho(T_{k+1})<\rho(T_k),\ k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots. \tag{38}$$

此处 $\rho(T_k)$ 为矩阵 T_k 的谱半径. 从(37)与(38)可知: Jacobi 型算法收敛,且其收敛因子为 $\rho(T_1)$.

对 Gauss-Seidel 型算法(28),其误差函数为:

$$e_j^{(i+1)}(x,\ y)=\sum_{k=1}^{\infty}[b_{j-1,k}^{(i+1)}r_{j,k}^{(1)}(x)+a_{j+1,k}^{(i)}r_{j,k}^{(2)}(x)]\sin k\pi y, \tag{39}$$

其中初始误差函数为

$$e_{j+1}^{(0)}(x_j^{(2)}, y)=\sum_{k=1}^{\infty} a_{j+1,k}^{(0)} \sin k\pi y,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1.$$

记 $$\overset{*}{E}_k^{(i)}=(a_{2,k}^{(i)},\ a_{3,k}^{(i)},\ \cdots,\ a_{j,k}^{(i)},\ \cdots,\ a_{m,k}^{(i)})^T,$$

由(39)可以证明

$$\overset{*}{E}_k^{(i+1)}=T_k^* \overset{*}{E}_k^{(i)},\ k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots. \tag{40}$$

其中 T_k^* 与(13)中的矩阵 T^* 有相同的构造，如果以(32)中的 $r_{j,k}^{(s)}(x)$ 代替 T^* 中的 $r_j^{(s)}(x)$，$s=1,\ 2.$

用(36)可以证明

$$\rho(T_k^*)<1 \tag{41}$$

且

$$\rho(T_{k+1}^*)<\rho(T_k^*),\ k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots. \tag{42}$$

由此可知：Gauss-Seidel 型算法(28) 收敛，且其收敛因子为 $\rho(T_1^*)$.

当 $m=2$ 时，即对 Schwarz 交替法，有

$$\rho(T_1^*)=\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\pi^2+q^2}\,x_2^{(1)}}{\operatorname{sh}\sqrt{\pi^2+q^2}\,x_1^{(2)}}\cdot\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\pi^2+q^2}\,(1-x_1^{(2)})}{\operatorname{sh}\sqrt{\pi^2+q^2}\,(1-x_2^{(1)})}. \tag{43}$$

这一结果也是不能再改进了．它精确地描述了 Schwarz 交替法的全部收敛特征，包括收敛速度与重叠区域的大小及拟边界 $\Gamma_1^{(2)}$ 与 $\Gamma_2^{(1)}$ 的位置之间的关系.

对于 Neumann 问题：

$$\begin{cases} -\Delta u+q^2 u=f \text{ 于 } \Omega \text{ 内}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}=\varphi \text{ 于 } \Gamma \text{ 上}. \end{cases} \tag{44}$$

应用 Schwarz 交替法：

$$
\begin{cases}
-\Delta u_j^{(i+1)}+q^2u_j^{(i+1)}=f \text{ 于 } \Omega_j \text{ 内,} \\
\dfrac{\partial u_j^{(i+1)}}{\partial n}=\varphi \text{ 于 } \Gamma \text{ 上,} \\
\dfrac{\partial u_j^{(i+1)}}{\partial x}=\dfrac{\partial u_{j-1}^{(i+1)}}{\partial x} \text{ 于 } \Gamma_j^{(1)} \text{ 上,} \\
\dfrac{\partial u_j^{(i+1)}}{\partial x}=\dfrac{\partial u_{j+1}^{(i)}}{\partial x} \text{ 于 } \Gamma_j^{(2)} \text{ 上}, j=1,\ 2,
\end{cases} \tag{45}
$$

$$
i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.
$$

其中 $\dfrac{\partial u_2^{(0)}}{\partial x}$ 在 $\Gamma_1^{(2)}$ 上为初始猜测函数.

设初始误差 $e_2^{(0)}=u^*-u_2^{(0)}$ 在 $\Gamma_1^{(2)}$ 上有展开式:

$$
\frac{\partial e_2^{(0)}(x_1^{(2)},\ y)}{\partial x}=\sum_{k=1}^{\infty}\bar{b}_k^{(0)}\cos k\pi y, \tag{46}
$$

则误差函数为

$$
\begin{cases}
e_1^{(i+1)}(x,\ y)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\bar{a}_k^{(i+1)}}{Q_k}\cdot\frac{\operatorname{ch} Q_k x}{\operatorname{sh} Q_k x_1^{(2)}}\cos k\pi y\right), \\
e_2^{(i+1)}(x,\ y)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\bar{b}_k^{(i+1)}}{Q_k}\cdot\frac{\operatorname{ch} Q_k (x-1)}{\operatorname{sh} Q_k (x_2^{(1)}-1)}\cos k\pi y\right),
\end{cases} \tag{47}
$$

其中 $Q_k=(k^2\pi^2+q^2)^{1/2}$.

记

$$
a_k^{(i)}=\frac{\bar{a}_k^{(i)}}{Q_k}\cdot\frac{\operatorname{ch} Q_k x_2^{(1)}}{\operatorname{sh} Q_k x_1^{(2)}},\quad b_k^{(i)}=\frac{\bar{b}_k^{(i)}}{Q_k}\cdot\frac{\operatorname{ch} Q_k (x_1^{(2)}-1)}{\operatorname{sh} Q_k (x_2^{(1)}-1)}. \tag{48}
$$

由(47)及拟边值条件可以得到

$$
a_k^{(i+1)}=\rho_k a_k^{(i)},\ b_k^{(i+1)}=\rho_k b_k^{(i)}, \tag{49}
$$

其中

$$
\rho_k=\frac{\operatorname{sh} Q_k x_2^{(1)}}{\operatorname{sh} Q_k x_1^{(2)}}\cdot\frac{\operatorname{sh} Q_k (x_1^{(2)}-1)}{\operatorname{sh} Q_k (x_2^{(1)}-1)}.
$$

由(47)、(48)及(49)得

$$\begin{cases} e_1^{(i+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(i+1)} \dfrac{\mathrm{ch} Q_k x}{\mathrm{ch}\, Q_k x_1^{(2)}} \cos k\pi y \\ \quad = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^i \bar{b}_k^{(0)} \dfrac{\mathrm{sh}\, Q_k (1-x_1^{(2)})}{\mathrm{sh}\, Q_k (1-x_2^{(1)})} \cdot \dfrac{\mathrm{ch}\, Q_k x}{\mathrm{ch}\, Q_k x_1^{(2)}} \cos k\pi y, \\ e_2^{(i+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(i+1)} \dfrac{\mathrm{ch} Q_k (x-1)}{\mathrm{ch}\, Q_k (x_2^{(1)}-1)} \cos k\pi y \\ \quad = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^{i+1} \dfrac{\bar{b}_k^{(0)}}{Q_k} \dfrac{\mathrm{ch} Q_k (x_1^{(2)}-1)}{\mathrm{sh} Q_k (x_2^{(1)}-1)} \cdot \dfrac{\mathrm{ch}\, Q_k (x-1)}{\mathrm{ch}\, Q_k (x_2^{(1)}-1)} \cos k\pi y. \end{cases}$$

因 ρ_k 是 k 的单调下降函数，故知解 Neumann 问题 (44) 的 Schwarz 交替法的收敛因子为

$$\rho_1 = \frac{\mathrm{sh}\sqrt{\pi^2+q^2}\,x_2^{(1)}}{\mathrm{sh}\sqrt{\pi^2+q^2}\,x_1^{(2)}} \cdot \frac{\mathrm{sh}\sqrt{\pi^2+q^2}\,(x_1^{(2)}-1)}{\mathrm{sh}\sqrt{\pi^2+q^2}\,(x_2^{(1)}-1)}. \tag{50}$$

与(43)比较即知：它与解 Dirichlet 问题时敛速相同.

对于 n 维问题，采用类似的分析方法可以证明 Schwarz 交替法的收敛因子为：

$$\rho_1 = \frac{\mathrm{sh}\sqrt{(n-1)\pi^2+q^2}\,x_2^{(1)}}{\mathrm{sh}\sqrt{(n-1)\pi^2+q^2}\,x_1^{(2)}} \cdot \frac{\mathrm{sh}\sqrt{(n-1)\pi^2+q^2}\,(x_1^{(2)}-1)}{\mathrm{sh}\sqrt{(n-1)\pi^2+q^2}\,(x_2^{(1)}-1)}.$$

将它与(16)、(50)比较就可看出：Schwarz 交替法解高维问题时的收敛速度比解低维问题时要快些.

§4 加速 Schwarz 算法的方法[82]

有几种加速 Schwarz 算法收敛性的方法：引进拟边界收敛因子；采用混合拟边界条件；采用外推技术.

(1) 拟边界松弛法

考虑模型问题

$$\begin{cases} Lu=f \text{ 于 } \Omega \text{ 内}, \\ u=\varphi \text{ 于 } \Gamma \text{ 上}. \end{cases} \tag{51}$$

算法:

$$\begin{cases} Lu_j^{(i+1)}=f \text{ 于 } \Omega_j \text{ 内}, \\ u_j^{(i+1)}=\varphi \text{ 于 } \Gamma \text{ 上}, \\ u_j^{(i+1)}=u_{j-1}^{(i)}+\omega_j(u_{j-1}^{(i+1)}-u_{j-1}^{(i)}) \text{ 于 } \Gamma_j^{(1)} \text{ 上}, \\ u_j^{(i+1)}=u_{j+1}^{(i-1)}+\omega_j(u_{j+1}^{(i)}-u_{j+1}^{(i-1)}) \text{ 于 } \Gamma_j^{(2)} \text{ 上}, \end{cases} \tag{52}$$

$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots.$$

其中 $u_0^{(i+1)}=\varphi$, $u_{m+1}^{(i)}=\varphi$, $u_j^{(0)}$, $u_j^{(-1)}$在拟边界 $\Gamma_j^{(1)}$ 与 $\Gamma_j^{(2)}$ 上为初始猜测, ω_j 为松弛因子. 当 $\omega_j\equiv 1$ 时, (52)即变成 Gauss-Seidel 型 Schwarz 算法(28).

当 $m=2$, ω_j 为常数时, 若记 Schwarz 算法($\omega_j=1$)的收敛因子为 ρ, 则有最佳松弛因子为

$$\omega_{opt}=(3/\sqrt{\rho})\cos((s+4\pi)/3), \tag{53}$$

其中 $s=\arccos(-\sqrt{\rho})$, 且相应的收敛因子为

$$\rho_{opt}=3(\omega_{opt}-1)/\omega_{opt}. \tag{54}$$

在一般情况下, 如何选取 $\omega_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 最佳仍是一个没有解决的问题.

(2) 混合拟边界条件松弛法

另一种引入松弛参数的方法是采用混合拟边界条件. 为简单起见, 这里只讨论一维问题

$$\begin{cases} Ly=-\dfrac{d^2y}{dx^2}+q^2y=f \text{ 于 } \Omega=\{x\,|\,0<x<1\}, \\ y(0)=a,\ y(1)=b. \end{cases} \tag{1}$$

我们用下述算法来代替 Gauss-Seidel 型算法(3):

$$
\begin{cases}
Ly_j^{(i+1)}=f \text{ 于 } \Omega_j \text{ 内}, \\
c_j^{(1)}y_j^{(i+1)}+d_j^{(1)}\dfrac{\mathrm{d}y_j^{(i+1)}}{\mathrm{d}x} \\
\quad =c_j^{(1)}y_{j-1}^{(i+1)}+d_j^{(1)}\dfrac{\mathrm{d}y_{j-1}^{(i+1)}}{\mathrm{d}x}, \text{ 于 } x=x_j^{(1)} \text{ 上}, \\
c_j^{(2)}y_j^{(i+1)}+d_j^{(2)}\dfrac{\mathrm{d}y_j^{(i+1)}}{\mathrm{d}x} \\
\quad =c_j^{(2)}y_{j+1}^{(i)}+d_j^{(2)}\dfrac{\mathrm{d}y_{j+1}^{(i)}}{\mathrm{d}x}, \text{ 于 } x=x_j^{(2)} \text{ 上},
\end{cases}
\tag{55}
$$

$$
i=0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m,
$$

$$
i=1,\ j=m-1,\ m-2,\ \cdots,\ 2,\ 1,\ y_m^{(2)}=y_m^{(1)},
$$

其中 $c_j^{(k)}$, $d_j^{(k)}$ $(k=1,\ 2,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$为松弛参数,

$y_j^{(0)}$与$\dfrac{\mathrm{d}y_j^{(0)}}{\mathrm{d}x}$在 $x=x_j^{(2)}$上$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1)$为初始猜测.

可以证明,若选取松弛参数,使得

$$
\begin{cases}
c_j^{(1)}\operatorname{sh} qx_j^{(1)}+d_j^{(1)}q\operatorname{ch} qx_j^{(1)}=0,\ j=2,\ 3,\ \cdots,\ m, \\
c_j^{(2)}\operatorname{sh} qx_j^{(2)}+d_j^{(2)}q\operatorname{ch} qx_j^{(2)}=0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1,
\end{cases}
\tag{56}
$$

则迭代两步即可得到问题的精确解 y^*.

对于高维问题,采用类似的算法,虽然两步之内不能保证得到问题的精确解,但可消去误差的低频分量,有效地加速算法的收敛.

(3) 外推技术

假设用 Schwarz 交替法得到近似解序列$\{u^{(i)}\}$, 其误差记为 $e^{(i)}=u^*-u^{(i)}$,其中 u^* 为问题的精确解. 若存在常数 $\rho\neq 1$, 使得 $e^{(i+1)}=\rho e^{(i)}$, 则

$$
u^*=\frac{1}{1-\rho}u^{(i+1)}-\frac{\rho}{1-\rho}u^{(i)}. \tag{57}
$$

例如，对于一维问题(1)，由(16)知有

$$e^{(i+1)}=\frac{\operatorname{sh} q x_2^{(1)}}{\operatorname{sh} q x_1^{(2)}}\cdot\frac{\operatorname{sh} q\left(1-x_1^{(2)}\right)}{\operatorname{sh} q\left(1-x_2^{(1)}\right)} e^{(i)}=\rho(T^*) e^{(i)},$$

故得

$$u^*=\frac{1}{1-\rho(T^*)} u^{(2)}-\frac{\rho(T^*)}{1-\rho(T^*)} u^{(1)},$$

即迭代两步得到问题(1)的精确解.

对常系数一维两点边值问题，通常我们都可以应用此法在两步迭代之后得到它的精确解，即使是原来的算法不收敛($|\rho|>1$).

对于二维问题(27)，应用带混合拟边界条件的 Schwarz 交替法，若选取参数 $c_1^{(2)}=0$, $d_1^{(2)}=1$, $c_2^{(1)}=1$, $d_2^{(1)}=0$，则有 $\rho(T_m^*)=-1$. 这时，根据(57)，我们迭代两步即可得到问题(27)的精确解

$$u^*=(u^{(1)}+u^{(2)})/2.$$

§5 对称区域分裂法[69],[71],[76],[77],[89],[100],[101]

前面我们讨论的区域分裂法都是带有重叠部分的，其解法都是迭代法. 这一节我们讨论一种特殊的不带重叠的区域分裂法，而且分裂后采用直接解法.

为了说明方法的实质，我们先考虑一个最简单的问题:

$$\begin{cases}-\dfrac{d^2 y}{dx^2}=f \text{ 于 } \Omega=\{x \mid 0<x<1\}, \\ y(0)=a,\ y(1)=b.\end{cases} \tag{58}$$

将 Ω 分裂为两个对称的子区域:

$$\Omega=\{x \mid 0<x<1/2\} \text{ 与 } \Omega_2=\left\{x \,\middle|\, \frac{1}{2}<x<1\right\}.$$

引进下述算法:

首先求解两个子问题:

$$\begin{cases} -\dfrac{\mathrm{d}^2 y^{(1)}}{\mathrm{d}x^2}=f \text{ 于 } \Omega_1 \text{ 内}, \\ y^{(1)}(0)=a, \\ y^{(1)}(1/2)=y^{(0)}(1/2), \end{cases} \tag{59}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\mathrm{d}^2 z^{(1)}}{\mathrm{d}x^2}=f \text{ 于 } \Omega_2 \text{ 内}, \\ z^{(1)}(1)=b, \\ z^{(1)}(1/2)=y^{(0)}(1/2). \end{cases} \tag{60}$$

然后再解两个子问题:

$$\begin{cases} -\dfrac{\mathrm{d}^2 y^{(2)}}{\mathrm{d}x^2}=f \text{ 于 } \Omega_1 \text{ 内}, \\ y^{(2)}(0)=a, \\ \dfrac{\mathrm{d}y^{(2)}(1/2)}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}z^{(1)}(1/2)}{\mathrm{d}x}, \end{cases} \tag{61}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\mathrm{d}^2 z^{(2)}}{\mathrm{d}x^2}=f \text{ 于 } \Omega_2 \text{ 内}, \\ z^{(2)}(1)=b, \\ \dfrac{\mathrm{d}z^{(2)}(1/2)}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y^{(1)}(1/2)}{\mathrm{d}x}, \end{cases} \tag{62}$$

其中 $y^{(0)}(1/2)$ 为任意给出的初值(拟边界条边), $\dfrac{\mathrm{d}z^{(1)}}{\mathrm{d}x}$ 与 $\dfrac{\mathrm{d}y^{(1)}}{\mathrm{d}x}$ 在 $x=1/2$ 处的值分别理解为它们在此点上的右、左导数.

记问题(58)的精确解为 y^*, 误差为

$e^{(i)}=y^*-y^{(i)}$ 于 $\overline{\Omega}_1$ 上, $E^{(i)}=y^*-z^{(i)}$ 于 $\overline{\Omega}_2$ 上, 则误差满足问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 e^{(1)}}{\mathrm{d}x^2}=0 \text{ 于 } \Omega_1 \text{ 内}, \\ e^{(1)}(0)=0, \\ e^{(1)}(1/2)=e^{(0)}(1/2), \end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{d^2E^{(1)}}{dx^2}=0 \text{ 于 } \Omega_2 \text{ 内}, \\ E^{(1)}(1)=0, \\ E^{(1)}(1/2)=e^{(0)}(1/2),\end{cases}$$

及

$$\begin{cases}\dfrac{d^2e^{(2)}}{dx^2}=0 \text{ 于 } \Omega_1 \text{ 内}, \\ e^{(2)}(0)=0, \\ \dfrac{de^{(2)}(1/2)}{dx}=\dfrac{dE^{(1)}(1/2)}{dx},\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{d^2E^{(2)}}{dx^2}=0 \text{ 于 } \Omega_2 \text{ 内}, \\ E^{(2)}(1)=0, \\ \dfrac{dE^{(2)}(1/2)}{dx}=\dfrac{de^{(1)}(1/2)}{dx}.\end{cases}$$

解之，得：

$$e^{(1)}(x)=2e^{(0)}(1/2)x,\ E^{(1)}(x)=2e^{(0)}(1/2)(1-x),$$

$$e^{(2)}(x)=-2e^{(0)}(1/2)x,\ E^{(2)}(x)=-2e^{(0)}(1/2)(1-x).$$

由此可见误差 $e^{(1)}$ 与 $E^{(1)}$ 及 $e^{(2)}$ 与 $E^{(2)}$ 关于 $x=\frac{1}{2}$ 对称，且有 $e^{(1)}(x)=-e^{(2)}(x)$ 于 $\bar{\Omega}_1$ 及 $E^{(1)}(x)=-E^{(2)}(x)$ 于 $\bar{\Omega}_2$. 故我们称它为误差对称原理. 根据这一原理，可得问题(58)的精确解：

$$y^*(x)=\begin{cases}(y^{(1)}(x)+y^{(2)}(x))/2 \text{ 于 } \bar{\Omega}_1 \text{ 上}, \\ (z^{(1)}(x)+z^{(2)}(x))/2 \text{ 于 } \bar{\Omega}_2 \text{ 上}.\end{cases} \tag{63}$$

对于二维问题：

$$\begin{cases}-\Delta u=f \text{ 于 } \Omega=\{(x,\ y)\,|\,0<x<1,\ 0<y<1\} \text{ 内}, \\ u|_\Gamma=\varphi.\end{cases} \tag{64}$$

我们将区域 Ω 分裂为对称的两个子区域：

$$\Omega_1=\left\{(x,\ y)\,\middle|\,0<x<\frac{1}{2},\ 0<y<1\right\},$$

$$\Omega_2=\left\{(x,\ y)\,\middle|\,\frac{1}{2}<x<1,\ 0<y<1\right\}.$$

记拟边界为 $\Gamma'=\overline{\Omega}_1\cap\overline{\Omega}_2$.

对称区域分裂算法如下，先解两个子问题:

$$\begin{cases}-\Delta u_i^{(1)}=f\ 于\ \Omega_i\ 内,\\ u_i^{(1)}=\varphi\ 于\ \Gamma\ 上,\\ u_i^{(1)}=u^{(0)}于\ \Gamma'\ 上, i=1,\ 2.\end{cases}$$

然后解两个子问题:

$$\begin{cases}-\Delta u_i^{(2)}=f\ 于\ \Omega_i\ 内,\\ u_i^{(2)}=\varphi\ 于\ \Gamma\ 上,\\ \dfrac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x}=\dfrac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x}\ 于\ \Gamma'\ 上, i\neq j,\ i,\ j=1,\ 2,\end{cases}$$

其中拟边界条件 $u^{(0)}(y)$ 是任意给定的连续函数，使满足 $u^{(0)}(0)=\varphi\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$与 $u^{(0)}(1)=\varphi\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$.

根据误差对称原理可得问题(64)的精确解

$$u^*(x,\ y)=\begin{cases}(u_1^{(1)}(x,\ y)+u_1^{(2)}(x,\ y)/2\ 于\ \overline{\Omega}_1\ 上,\\ (u_2^{(1)}(x,\ y)+u_2^{(2)}(x,\ y))/2\ 于\ \overline{\Omega}_2\ 上.\end{cases}$$

这一原理可以推广到更一般的情形.

考虑二阶线性偏微分方程:

$$\begin{cases}Lu=f\ 于\ \Omega\ 内,\\ u=\varphi\ 于\ \Gamma=\partial\Omega\ 上.\end{cases}\tag{65}$$

若区域 Ω 关于 Γ' 对称，算子 L 关于区域分裂对称，即

$$Lu(x)=L\tilde{u}(x'),\ \forall x\in\Omega_1,\ x'=\Omega_2,$$

其中 x' 是 x 关于 Γ' 的对称点.

定理 9.1(饶传霞, 1987): 问题(65)的解为

$$u^* = \begin{cases} (u_1^{(1)} + u_1^{(2)})/2 \text{ 于 } \bar{\Omega}_1, \\ (u_2^{(1)} + u_2^{(2)})/2 \text{ 于 } \bar{\Omega}_2, \end{cases} \tag{66}$$

其中 $u_i^{(j)}(i,\ j=1,\ 2)$ 为下述问题的解:

$$\begin{cases} Lu_i^{(1)} = f \text{ 于 } \Omega_i \text{ 内}, \\ u_i^{(1)} = \varphi \text{ 于 } \Gamma \text{ 上}, \\ u_i^{(1)} = g \text{ 于 } \Gamma' \text{ 上}, \end{cases} \tag{67}$$

和

$$\begin{cases} Lu_i^{(2)} = f \text{ 于 } \Omega_i \text{ 内}, \\ u_i^{(2)} = \varphi \text{ 于 } \Gamma \text{ 上}, \\ \dfrac{\partial u_i^{(2)}}{\partial n} = \dfrac{\partial u_j^{(1)}}{\partial n} \text{ 于 } \Gamma' \text{ 上}, i \neq j \end{cases} \tag{68}$$

其中 n 是 Γ' 的法线方向, g 为任意的连续函数.

误差对称原理已被推广为更一般的形式, 且有诸多应用. 下面介绍进一步的结果: 对称化原理.

记点 x 关于 Γ' 对称的点为 x', 且记

$f^+(x) = (f(x) + f(x'))/2,\ f^-(x) = (f(x) - f(x'))/2.$

定理 9.2(吕涛, 1987): 问题(65)的解为

$$u^*(x) = \begin{cases} u^+(x) - u^-(x') \text{ 于 } \Omega_1 \text{ 上}, \\ u^+(x') + u^-(x) \text{ 于 } \Omega_2 \text{ 上}, \end{cases} \tag{69}$$

其中 u^+ 与 u^- 分别为下述子问题的解:

$$\begin{cases} Lu^+ = f^+ \text{ 于 } \Omega_1 \text{ 内}, \\ u^+ = \varphi^+ \text{ 于 } \Gamma \text{ 上}, \\ \dfrac{\partial u^+}{\partial n} = 0 \text{ 于 } \Gamma' \text{ 上}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} Lu^- = f^- \text{ 于 } \Omega_2 \text{ 内}, \\ u^- = \varphi^- \text{ 于 } \Gamma \text{ 上}, \\ u^- = 0 \text{ 于 } \Gamma' \text{ 上}, \end{cases}$$

上述结果还可以推广到高阶线性偏微分方程. 此外, 对

于离散的问题相应的结果都成立.

§6 区域分裂法的发展[99]

区域分裂法(DDM), Domain Decomposition Method, 有许多优点，如区域分裂方式的任意性、区域分裂后物理问题的数学描述的多样性以及问题求解方法的灵活性，因此它已成为大型科学计算问题的算法设计的重要方法．有关文献日渐增多([61]~[101])．特别是从 1987 年起，每年召开一次区域分裂法国际学术会议,越来越多的人投入这一领域工作. DDM发展到今天，它已不再是一个单纯的计算方法甚至一类计算方法，而是问题求解一整过程的思想与方法的集成．特别是并行计算机的出现,它就成了并行算法设计的一种 DAC(divide and conquer)策略(分而治之)[72],[73],[99].

DDM 有三种主要类型：(1)带重叠的区域分裂法(DDM-1)，(2)不带重叠的区域分裂法(DDM-2)，(3)带虚拟成份的区域分裂法(DDM-3)．各种类型又有多种形态：离散的区域分裂法(DDDM 或 D^3M)或网格区域分裂法(GDDM)、空间分裂法(SDM)、算子分裂法(ODM)以及系统分裂法(SyDM).

DDM 是上个世纪六十年代由德国数学家 H. Schwarz 为解复杂区域上的偏微分方程而提出的，最初用来证明两个凸区域的和上的 Laplace 方程的 Dirichlet 问题解的存在性．后来被称为 Schwarz 交替法. [96],[3]发展到今天就形成了第一类区域分裂法 (DDM-1) 及其离散化形式 D^3M-1，及带重叠的 DDM．本章§2~§4中讨论的就是 DDM-1 的收敛性理论. 这些理论与方法几乎可以平行地移到 D^3M-1 上去[101]．由力学上的子结构法(substructurin method)发展而成的第二类

区域分裂法（DDM-2）及其离散化形式 D^3M-2 是不带重叠的 DDM．本章§5 中讨论的对称区域分裂法就属于 DDM-2．1870 年，C. Neumann[95] 应用 Schwarz 的思想设计了一种求两个区域之交上的 Dirichlet 问题的交替法，后来被称为 Schwarz-Neumann 方法[96]．它发展到今天就形成了第三类区域分裂法（DDM-3）及其离散化形式 D^3M-3，即带虚拟成份的区域分裂法．上述三类方法还可以混合使用．

在并行计算机前期（1972 年以前），DDM 主要是用来求解复杂区域上的椭圆型方程以及混合型方程．或化繁为简，或以简代繁，以便分别采用正规区域（如矩形区域、圆形区域等）上的有效算法与软件来处理复杂区域上的问题或区域内部不同局部的特殊问题[61]．在并行计算机中期（1982 年至现在），即 MIMD 计算机（多指令流多数据流计算机）的发展期[72],[73]，DDM 则成为把大型科学计算问题"映射"到多处理机系统上去的一种 DAC 策略而受重视，因此得到迅速发展．在此双重背景下来研究 DDM 就有着特别重要的意义．

DDM-1 及 D^3M-1 是构造 MIMD 并行计算机的异步并行算法的基础[62]~[68]．它有许多优点．第一，据此形成的异步迭代法在多机系统上应用时具有良好的"算法容错性"，即计算过程中协作机之间的通讯偶然出错会被算法自动修正，对最后结果的正确性没有影响．第二，据此形成的多个进程之间具有"弱相关性"，即计算过程中协作处理机之间（或进程之间）只需交换子区域的拟边界上的信息，所以机间通讯开销极小．第三，据此形成的算法在 MIMD 计算机上实现混乱松弛（chaotic relaxation），进程之间无须彼此等待，故"同步"开销极小．第四，由于它的分裂方式的灵活性：形成进程的数目可多可少；任务的粒度（granularity）可大可小，甚至可以在计

算过程中进行动态调整，形成自适应算法以保持系统的负荷平衡(load balancing)，提高多处理机的效率．这类算法已在MIMD计算机上有效地实现([62]~[68])．

DDM-2及D^3M-2主要是用来构造MIMD计算机或SIMD计算机(单指令流多数据流计算机)上的同步并行算法．现有文献集中在研究D^3M-2，采用子结构消元法，先消去子区域内网点上的未知量，再解拟边界网点上的未知量组成的低阶方程组，然后回代求出各子区域内网点上的解．如果拟边界网点上的方程组也采用直接方法求解，则无需考虑算法的收敛性，故可用来处理很广泛的一类线性问题．在它的实施过程中，人们往往不进行显式消元，而是采用迭代法解拟边界网点上的方程组，如预条件共轭梯度法．D^3M-2的缺点是难于有效地应用于具有复杂边界的一些问题的并行求解，不仅程序编制比D^3M-1复杂，而且不具有算法容错能力．此外，算法在并行实施时的同步开销也较大．有些学者也在研究DDM-2与D^3M-2的迭代解法，但目前还看不出来它比DDM-1有什么优越性[90]~[94]．

研究DDM-3及D^3M-3的工作比较少．刘裕辉等[10]曾证明DDM-3与DDM-1有同样的收敛性态．苏美学者在D^3M-3方面作了一些工作([95]~[98])．

实际应用DDM时，可根据被解问题的性质以及计算机结构的特点混合使用上述三类方法．

参 考 文 献

[1] Schwarz, H. A., Über einen Grenz bergang durch alternirendes Verfaren, Ges. Math., Abhandlungen, Bd. 1. Berlin, 1870, s. 133~143.

[2] Picard, E., Traite d'analyse, T. 2. Paris, 1891~1896.

[3] Picard, E., Mémoire Sur la theorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives, J. Math., pures et appl., ser. 4, 6(1890), 145~210.

[4] Конторович, Л. В., Крылов, В. И., Приближенные Методы высшего анализа. М.-Л., Физматгиз, 1962.

[5] Соболев, С. Л., Алгорифм шварца в теории упругости, ДАН СССР, Т. IV(XIII)1936, No. 6, 236~238.

[6] Kang Lishan, The Schwarz algorithm, Wuhan University J., (Natural Science Edition), Special Issue of Math., (I) 77~83 (1981).

[7] 康立山，Schwarz 交替法的推广，武汉大学学报(自然科学版)1979 年第四期 11~23.

[8] Linden, J., Mehrgitterrfahren für die Poisson-Gleichung in Kreis und Ringgebiet unter Verwendung lokaler Koordinaten. Diplom rbiet, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Bonn, 1981.

[9] Allgower, E. L., Application of a fixed point search algorithm to nonlinear boundary value problems having several solutions. Fixed Points Algorithms and Application, Edited by S. Karamardian, Academic press, 1977, 87~111.

[10] Stoutemyer D. R., Numerical implementation of the Schwarz alternating procedure for elliptic partial differential equations, SIAM J. Numer. Anal. Vol. 10, No. 2(1973)308~326.

[11] 陈毓屏，康立山，Schwarz 算法及其在分布式并行处理机上的应用(IV)-解奇异性椭圆型边值问题，分布式并行处理系统探索，102~114，武汉大学出版社，1984.

[12] Ahmed, S., Lazer, A. C. and Paul, J. L., Elementary critical point theory and perturbations of elliptic boundary Value problems at resonance (preprint), Indiana Univ. Math. J. 25 (1976), 933~944.

[13] Akin, J. E., 局部奇异性的计算方法，应用数学与计算数学，1983 年第一期，42~48.

[14] Greenspan, D., Discrete Numerical Methods in Physics and Engineering, Academic Press, 1974, 208~227.

[15] Thomasset, F., Numerical solution of Navier-Stokes equations by finite element methods, Lecture at the Von Karman Institute, Computational fluid clynamic course, V. K. I. Rhode-Saint-Genese, March 1977.

[16] Benazeth, J. C., Resolution des equations de Navier-Stokes stationnaires par une methode d'éléments finis mixtes, These de 3 ecycle, Paris, VI, 1978.

[17] 康立山，陈毓屏，邱毓兰，Schwarz 算法及其在分布式并行处理机上的应用(II)-解弱非线性椭圆边值问题，分布式并行处理系统探索 80~91，武汉大学出版社，1984.

[18] 康立山，陈毓屏，Schwarz 算法及其在分布式并行处理机上的应用(III)-解二维定常 Navier-Stokes 方程，分布式并行处理系统探索 92~101，武汉大学出版社，1984.

[19] Ostrowski, A, M., On the linear iteration procedures for symmetric matrices, In memory of Fabio Conforto (1958).

[20] Hilbert, F., Numerical Solution of Some nonliear problems: Application to physics and technique, ISNM 37 Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart, 1977, 227~248.

[21] Southwell, R. V., Relaxation Methods in Theoretical Physics, Clarendon Press, Oxford, Vol. 1, 248pp., vol. 2, pp. 250~522. 147, 241.

[22] Мысовских, И. П., О сходимости метода Л. В. Канторовича решения функциональных уравнений и его применения, Докл. АН СССР, 1950, 70, № 4, 565~586.

[23] Schryer, N. L., Newton's method for convex nonlinear elliptic boundary value problems, Numer. Math., 17 (1971) 284~300.

[24] 王烈衡，非线性椭圆边值问题的牛顿迭代法，«计算数学»第三期，No. 4,

1981, 320～328.

[25] Hageman, L. A., Porsching, T. A., Aspects of nonlinear block successive overrelaxation, SIAM J. Numer. Anal. 12(1975), 316～335.

[26] 王德人，非线性方程组解法与最优化方法，人民教育出版社(1979)，59～74.

[27] 冯果忱，解非线性方程组松弛法的大范围收敛性，高等学校计算数学学报第一期，1980, 7～14.

[28] Marchuk, G. I., Il'in, V. P., Parallel Computations in grid methods for solving mathematical Physics Problems, Information Processing 80, S. H. Lavington(ed.), North-Holland Publishing Company, IFIP 1980.

[29] Федоренко, Р. П. Релаксационный метод Решения рачностных эллиптиуеских урaьнений, жвмимф, 1, 5(1961), 922～927.

[30] Fedorenko, R. P., A relaxationm ethod for solving elliptic difference equations, U. S. S. R., Computational Math. and Math. Phys., 1 No. 5, pp. 1092～1095, 1962.

[31] Bakhvolov, N. S., On the convergence of a relaxation method with natural constrains on the elliptic operator, V. S. S. R. Computational Math. and Math. Phys., 6 No. 5, pp. 101～135, 1966.

[32] Brandt, A., Multi-level adaptive technique (MLAT) for fast numerical Solution to boundary value problems, proceedings third international conference on Numerical methods in fluid mechanics, Paris 1972 (H. Cabannes, R. Teman eds.) Lecture notes in physics, 18, pp. 82～89. Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[33] Nicolaides, R. A., On the L^2 Convergence of an algorithm for solving finite element equations, Math. Comp, 31, 892～906 (1977)-on multigrid convergence in the indefinite case, Math. comp., 32, 1082～1086(1978).

[34] Hackbusch, W., Multi-grid convergence theory, Lecture notes in mathematics, 960, 177～219.

[35] Brandt, A., Multigrid solvers on parallel computers, Elliptic Problem solvers (M. H. Schultz ed.), pp. 39～84, Academic Press, New York NY 1981.

[36] Stüen, K., Trottenberg, U., Multigrid method: Fundamental

algorithm model problem analysis and applications, Lecture notes in mathematics 960, 1～176, Springer-Verlag, Berlin 1982.

[37] 彭德纯，康立山等，分布式并行处理系统探索，武汉大学出版社，1984.

[38] Ortega, J. M., Rheinboldt, W. C., Iterative solution of nonlinear equation in several variables, Academic press, 1970. (有中译本，多元非线性方程组迭代解法，科学出版社，1983).

[39] 曹志浩，张玉德，李瑞遐，矩阵计算和方程求根，人民教育出版社，1979.

[40] Brandt, A., Multi-level adaptive techniques (MLAT) I. The multi-grid method, Research report, RC 6026, IBM T. J. Watson research Center, Yorktown Heights, NY, 1976.

[41] Brandt, A., Multi-level adaptive solution to boundary-value problems, Math, Comp. 31, pp. 333～390, 1977.

[42] 米赫林，C. Г.，二次泛函的极小问题，科学出版社，1964.

[43] Dryja, M., A decomposition method for solving finite element equations, IInf. Uw. Report, Nr, 122. University of Warsaw, 1983.

[44] Glowinski, R., Periaux, J. and Dinh, Q. V., Domain decomposition methods for nonlinear problems in fluid dynamics, Report 147 INRIA, Le Chesnay 1982.

[45] Hackbusch, W., The fast numerical solution of very large elliptic difference schemes. J. Inst. Math. Applics. 26, 119～132, 1980.

[46] Hackbusch, W., Local defect correction method and domain decomposition techniques, Defect correction method, theory and appticaticns, 89～113, 1984.

[47] Starius, G., Composite mesh difference methods for elliptic boundary value problems, Numer. Math., 28, 243～258, 1977.

[48] Bjôrstad, P. E., Widlund, O. B., Solving elliptic problems on regions partioned into substructures. (to appear).

[49] Hwang, K., Briggs, F. A., Computer Architecture and parallel processiing, McGraw-Hill Book Company, New York, 1984.

[50] Chazan, D., Miranker, W., Chaotic relaxation, Linear algebra and its applications, Vol, 2, 1969, 199～222.

[51] Donnelly, J. D. P., Periodic Chaotic relaxation. Linear algebra and its applications, Vol. 4, 1971, 117～128.

[52] Miellou, J. C., Itérations chaotiques à retards Comptes rendus, Acad., Sci. Paris, 278, série A, 957～960(1974).

[53] Baudet, G. M., Asynchronous iterative methods for multiprocessors, J. ACM, 25, 2. 226~244(1978).

[54] Tarazi, M. N. El, Contraction et order paritiel pour l'étude d'algorithmes synchrones et asynchrones en analyse numérique Thése Université de Besancron, 1981.

[55] Anwer, M. N., El Tarazi, M. N., Asynchronous Algorithms for poisson's equation with nonliear boundury conditions, Computing, 34, 155~168(1985).

[56] Kung, H. T., synchronized and asynchronous parallel algorithms for multiprocessors, In algorithms and complexity, New directions and recent results, J. F. Trub, ed., Academic press, New York, 1976.

[57] Похожаев, С. И., О задаче Дирихле для уравнения $\Delta U = U^2$, ДАН СССР Том, 134, 4(1960), 769~772.

[58] Wigley, N. M., On a method to subtruct off a singularity at a Corner for the Dirichlet or Neumann Problem. Math. Comp., 23 (1969) 395~401.

[59] 杨海刚，多层网格算法的异步并行化，武汉大学，数学研究报告，19 (1985), 58~67.

[60] Evans, D. J., (Ed.) Parallel processing syst ems, Cambridge University press, 1982.

[61] 康立山，Schwarz 交替法的推广，武汉大学学报，自然科学版，No. 4, (1979), 11~23.

[62] 康立山，解数学物理问题的异步并行算法，数学物理学报，No. 3, (1983), 483~494.

[63] 康立山，邱毓兰，陈毓屏，彭德纯，Schwarz 算法及其在分布式并行处理机上的应用(I)-解线性椭圆型边值问题，分布式并行处理系统探索，武汉大学出版社，(1984), 71~79.

[64] 康立山，孙乐林，陈毓屏，Schwarz 算法及其在分布式并行处理机上的应用(V)-解非定常数学物理问题，分布式并行处理系统探索，武汉大学出版社，(1984), 115~122.

[65] Sun Le-Lin, Quan Hui-yun, Schwarz-Projection method for solving some nonlinear P. D. E.'s, in Parallel Algorithms and Domain Decomposition Kang(Ed), (1987), 265~278.

[66] 饶传霞，对称区域分裂法解一类交接面问题，(待发表)《应用数学》, Vol. 3 (1990), No. 1.

[67] 邵建平，陈毓屏，解线性方程组的数值对称化方法，《应用数学》，Vol. 2 (1989), No. 1, 79～84.

[68] 康立山，孙乐林，陈毓屏，解数学物理问题的异步并行算法，专著，科学出版社，(1985).

[69] 饶传霞，并行解偏微分方程的对称区域分裂法，并行算法学术会议论文集，(1988)，425～436.

[70] 刘裕辉，用Schwarz-Neumann方法解两个相交圆区域上Dirichlet问题的收敛因子，并行算法学术会议论文集(1988)，437～443.

[71] 邵建平，区域分裂法对模型问题的收敛性，并行算法学术会议论文集，(1988)，444～455.

[72] 康立山，陈毓屏，并行算法简介(上)，数值计算与计算机应用，Vol. 9, No. 3(1988), 169～177.

[73] 康立山，陈毓屏，并行算法简介(下)，数值计算与计算机应用，Vol. 9, No. 4 (1988), 245～252.

[74] 康立山，陈毓屏，并行计算发展及异步并行算法，并行算法学术会议论文集(1988)，1～14.

[75] 肖佑恩，康立山，Schwarz算法的收敛速度，应用数学与计算数学，Vol. 2, (1988), 59～67.

[76] 邵建平，康立山，求解透射问题的双对称区域分裂法，并行算法学术会议论文集(1988)，235～241.

[77] 吕涛，对称区域分裂算法的改进与推广，并行算法学术会议论文集，(1988)，87～92.

[78] Kang Li-shan, Chen Yu-ping, Sun Le-lin, Quan Hui-yun, The asynchronous parallel algorithms S-COR for solving P. D. E.'s on multiprocessors, International Journal of Computer Mathematics, Vol. 1 (1985), 163～172.

[79] Evans. D. J., Kang Li-shan, Shao Jian-ping, Chen Yu-ping, The convergence rate of the Schwarz alternating procedure (I)-For one-dimensional problems, International Journal of Computer Methematics, Vol. 20 (1986) 325～339.

[80] Evans, D. J., Shao Jian-ping, Kang Li-shan, Chen Yu-ping, The convergence rate of the Schrawz alternating procedure (II)-For two-dimensional problems, International Journal of Computer Methematics, Vol. 20 (1986), 157～170.

[81] Kang Li-shan, Evans. D. J., The convergence rate of the Schwarz

alternating procedure (III)-For Neumann problems, International Journal of Computer Mathematics, Vol. 21 (1987), 85~108.

[82] Evans. D. J., Kang Li-shan, Chen Yu-ping, Shao Jian-ping, The convergence rate of the Schwarz alternating procedure (IV)-With pseudo-boundary relaxation factor, International Journal of Computer Mathematics, Vol. 21 (1987), 185~203.

[83] Kang Li-shan, Parallel algorithms and domain decomposition, Lecture Notes in Mathematics, 1297, Springr-Verlag (1987), 61~75.

[84] Shao Jian-ping, Kang Li-shan, An asynchronous parallel mixed algorithm for linear and nonlinear equations, Parallel Computing, Vol. 5 (1987), 313~321.

[85] Kang Li-shan, Evans. D. J., The convergence rate of the Schwarz alternating procedure (V)-For more that two subdomains, International Journal of Computer Mathematics, Vol. 23 (1988) 295~313.

[86] Shao Jian-ping, Kang Li-shan, Chen Yu-ping, Evans, D.J., The convergence rate of the Schwarz alternating procedure (VI)-For unsymmetric problems, International Journal of Computer Mathematics, Vol. 25 (1988), 139~154.

[87] Liu Yu-hui, Kang Li-shan, Evans, D. J., The convergence rate of the Schwarz alternating procedure (VII)-For the sum of two disks, International Journal of Computer Mathematics, Vol 27 (1989), 55~65.

[88] Chen Lu-juan, Kang Li-shan, The convergence factor of SAP for multi-dimensional problems in Parallel Algorithms And Domain Decomposition, Kang(Ed.) (1987), 141~148.

[89] Rao Chuan-xiu, Symmetric domain decomposition (SDD), An exact procedure for solving linear PDE's, in Parallel Algorithms And Domain Decomposition, Kang (Ed.) (1987), 161~176.

[90] Evans, D. J., Kang Li-shan, New domain decomposition strategies for elliptic partial defferential equations, in Domain Decomp. Methods, Tony F. Chan, et al. (Eds), SIAM, Philadelphia, [1989], (1989).

[91] Chan, T. F., Resasco, D., Hypercube Implementation of domain

decomposed fast Poisson solvers, Hypercube Multiprocessors, 1987, M. Heath (Ed.), SIAM, Philadelphia, 738～746.

[92] Bjorstad, P. E., Widlund, O. B., Iterative methods for the solution of elliptic problems on regions partitioned into substructures, Dept. Comp. Sci., Techn. Rep. 136, NYU, 1984.

[93] Matsokin, A. M., Nepomnyashchikh, S. U., On the convergence of the alternating subdomain Schwarz method without intersections, in Approximation and Interpolation Methods, Movesibirsk, 1981 (Russian).

[94] Lu Tao, Shih Tsi-min, Kien Chin-bo, Two synchronous parallel algorithms for partial differential equations, JCM, Vol. 6, No. 3. (1988).

[95] Neumann C., Leipziger Berichte 22 (1870), 264～321.

[96] Kantorovich, L. V., Krylov, V. I., The Approximate Methods of The Higher Analysis, Interscience Publishers, Inc., 1964.

[97] *Matsokin, A. M., Fictitious component method and modified difference analogue of the Schwarz method*, in Computational. Methods of Linear Algebra, Akad. Nauk SSSR, Novesibirsk, 1980, 66～77 (Russian).

[98] Stoutemyer, D. R., Numerical implementation of the Schwarz alternating procedure for elliptic partial differential equations, SIAM J. Numer. Anal., Vol., 10, No. 2 (1973), 308～326.

[99] Kang Li-shan, Evans, D. J., Strategies of domain decomposition for designing parallel algorithms, Proceedings of Parallel Computing 89, (1989).

[100] Shao Jian-ping, Kang Li-shan, Symmetric domain decomposition for linear operator equations, in Parallel Algorithms And Domain Decompos tion, Kang (Ed.) (1987), 177～185.

[101] Kang Li-shan (ed.), Parallel Algorithms and Domain Decomposition, Wuhan University Press (1987).

线性代数与多项式的快速算法		游兆永编著(已出版)
数论变换		蒋增荣编著(已出版)
矩阵特征值问题		曹志浩编著(已出版)
数值有理逼近		王仁宏编著(已出版)
索伯列夫空间引论	李立康	郭毓驹编著(已出版)
样条与插值		李岳生编著(已出版)
计算组合数学	徐利治 蒋茂森	朱自强编著(已出版)
奇异摄动中的边界层校正法		苏煜城编著(已出版)
沃尔什函数理论与应用	郑维行 苏维宜	任福贤编著(已出版)
多项式最佳逼近的实现		沈燮昌编著(已出版)
外推法及其应用		邓建中编著(已出版)
曲线曲面的数值表示和逼近		黄友谦编著(已出版)
对称矩阵计算		蒋尔雄编著(已出版)
广义逆矩阵的基本理论和计算方法		何旭初编著(已出版)
蒙特卡罗方法		徐钟济编著(已出版)
非线性方程的区间算法	王德人 张连生	邓乃扬编著(已出版)
舍入误差分析引论		唐 珍编著(已出版)
解边值问题的迦辽金方法		李荣华编著(已出版)
不动点算法		王则柯编著(已出版)
发展方程的有限元方法		黄明游编著(已出版)
非线性方程组迭代解法		冯果忱编著(已出版)
数值解高维偏微分方程的分裂法		康立山编著(已出版)
Padé 逼近概论		徐献瑜编著(已出版)

[General Information]
书名=数值解高维偏微分方程的分裂法
作者=唐立山　全惠云 等
页数=286
SS号=10070549
DX号=
出版日期=1990年11月第1版
出版社=上海科学技术出版社